仿射空间

1 向量空间的基本概念

1.1 向量：线性空间中的元素

在经典解析几何中，向量通常被定义为有大小和方向的量，可以用有向线段表示。然而，从现代数学观点来看，这种定义是具体而不够普遍的。

定义 1.1 (向量空间). 设 $\mathbb{F}$ 是一个域（通常是实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$），V 是一个非空集合，其上定义了两个运算：

- **加法**：$V \times V \to V$，记作 $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v}$
- **数乘**：$\mathbb{F} \times V \to V$，记作 $(\alpha, \mathbf{v}) \mapsto \alpha\mathbf{v}$

如果满足以下八条公理（对任意 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$）：

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ （加法交换律）
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ （加法结合律）
3. 存在 $\mathbf{0} \in V$，使得 $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ （零元存在）
4. 对每个 $\mathbf{v} \in V$，存在 $-\mathbf{v} \in V$，使得 $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ （负元存在）
5. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ （数乘单位元）
6. $\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}$ （数乘结合律）
7. $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$ （数乘分配律）
8. $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$ （数乘分配律）

则称 V 是 $\mathbb{F}$ 上的一个**向量空间**（或**线性空间**），V 中的元素称为**向量**。

例 1.1. 以下都是向量空间的例子：

1. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$，按分量加法和数乘构成 $\mathbb{R}$ 上的向量空间。

2. $M_{m\times n}(\mathbb{R})$：所有 $m\times n$ 实矩阵，按矩阵加法和数乘。

3. $C[a,b]$：定义在区间 $[a,b]$ 上的所有连续实函数，按函数加法和数乘。

4. 多项式空间 $\mathbb{R}[x]$ 或 $\mathbb{R}_n[x]$（次数不超过 n 的多项式）。

注 1.1. 在几何中，我们主要关心有限维实向量空间，特别是 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$。但线性空间的概念远比这广泛，它为统一处理各种数学对象提供了框架。

习题

1. 判断下列集合关于通常的加法和数乘是否构成 $\mathbb{R}$ 上的向量空间：

   (a) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$；

   (b) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1\}$；

   (c) 所有次数不超过 n 的实系数多项式构成的集合 $\mathbb{R}_n[x]$；

   (d) 所有 2×2 实矩阵中行列式为 0 的矩阵的集合。

2. 设 V 是向量空间，证明 $0\mathbf{v}=\mathbf{0}$ 对任意 $\mathbf{v}\in V$ 成立。

1.2 线性子空间与仿射子空间

定义 1.2 (线性子空间)**.** 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，$W\subseteq V$。如果 W 关于 V 的加法和数乘也构成 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，则称 W 是 V 的**线性子空间**（简称**子空间**）。等价地，W 是子空间当且仅当满足：

1. $\mathbf{0}\in W$

2. 对任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W$，有 $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in W$ （加法封闭）

3. 对任意 $\alpha\in\mathbb{F}$，$\mathbf{v}\in W$，有 $\alpha\mathbf{v}\in W$ （数乘封闭）

例 1.2. 1. 在 $\mathbb{R}^3$ 中，过原点的直线和平面对应于一维和二维子空间。

2. 齐次线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解空间是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。

定义 1.3 (仿射子空间)**.** 设 V 是向量空间，W 是 V 的子空间，$\mathbf{a}\in V$。则集合

$$\mathbf{a}+W=\{\mathbf{a}+\mathbf{w}\mid\mathbf{w}\in W\}$$

称为 V 的一个**仿射子空间**（或**线性流形**）。W 称为该仿射子空间的**方向子空间**，$\dim W$ 称为其**维数**。

注 1.2. 几何解释：

- 0 维仿射子空间：单点集 $\{\mathbf{a}\}$
- 1 维仿射子空间：直线
- 2 维仿射子空间：平面
- $n-1$ 维仿射子空间：超平面

注 1.3 (仿射空间与线性空间的关系)**.** 一个仿射子空间 $\mathbf{a}+W$ 是线性空间（向量空间）的充要条件是它包含零向量 $\mathbf{0}$。当且仅当 $\mathbf{0}\in\mathbf{a}+W$，即存在 $\mathbf{w}\in W$ 使得 $\mathbf{a}+\mathbf{w}=\mathbf{0}$，也即 $\mathbf{a}=-\mathbf{w}\in W$。此时 $\mathbf{a}+W=W$。

换言之，仿射子空间是线性空间当且仅当它经过原点。这也是为什么我们常说" 线性空间是过原点的仿射空间"。

习题

1. 判断下列 $\mathbb{R}^3$ 的子集是否为仿射空间：

   (a) $W_1=\{(x,y,z)\mid x=y\}$；

   (b) $W_2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2=0\}$；

   (c) $W_3=\{(x,y,z)\mid x+y=1\}$；

   (d) $W_4=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{Q}\}$（有理点）。

2. 设 $\mathbf{a}=(1,2,3)$，$W=\{(x,y,z)\mid x+y-z=0\}$。写出仿射子空间 $\mathbf{a}+W$ 的方程表示。

3. 证明：两个仿射子空间的交集要么是空集，要么是一个仿射子空间。

1.3　共线与共面：几何概念的代数表述

基于仿射子空间的概念，我们可以严格定义几何中的共线、共面等概念。

定义 1.4 (共线)**.** 设 V 是向量空间，$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\in V$。称这些向量（或它们对应的点）是**共线的**，如果存在一个一维仿射子空间包含所有这些点。等价地，存在向量 $\mathbf{a},\mathbf{d}\in V$，$\mathbf{d}\neq\mathbf{0}$，使得每个 $\mathbf{v}_i$ 可表示为

$$\mathbf{v}_i=\mathbf{a}+t_i\mathbf{d},\quad t_i\in\mathbb{R}$$

定义 1.5 (共面)**.** 类似地，$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\in V$ 是**共面的**，如果存在一个二维仿射子空间包含所有这些点。等价地，存在向量 $\mathbf{a},\mathbf{d}_1,\mathbf{d}_2\in V$，其中 $\mathbf{d}_1$ 和 $\mathbf{d}_2$ 线性无关，使得每个 $\mathbf{v}_i$ 可表示为

$$\mathbf{v}_i=\mathbf{a}+s_i\mathbf{d}_1+t_i\mathbf{d}_2,\quad s_i,t_i\in\mathbb{R}$$

1.4 共线共面的充要条件

定理 1.1 (三点共线的充要条件)**.** 设 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 是向量空间 V 中的向量。则 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 共线当且仅当存在不全为零的实数 λ,μ,ν，使得

$$\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c}=\mathbf{0}\quad \text{且}\quad \lambda+\mu+\nu=0.$$

特别地，当 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 互不相同时，这等价于向量 $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ 线性相关。

证明. 必要性：若 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 共线，则存在向量 $\mathbf{d}\neq\mathbf{0}$ 和实数 t_1,t_2，使得 $\mathbf{b}=\mathbf{a}+t_1\mathbf{d}$，$\mathbf{c}=\mathbf{a}+t_2\mathbf{d}$。于是

$$\mathbf{b}-\mathbf{a}=t_1\mathbf{d},\quad \mathbf{c}-\mathbf{a}=t_2\mathbf{d},$$

故 $(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ 与 $(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ 线性相关。令 $\lambda=t_2-t_1$, $\mu=-t_2$, $\nu=t_1$，则 $\lambda+\mu+\nu=0$，且

$$\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c}=(t_2-t_1)\mathbf{a}-t_2(\mathbf{a}+t_1\mathbf{d})+t_1(\mathbf{a}+t_2\mathbf{d})=\mathbf{0}.$$

充分性：若存在不全为零的实数 λ,μ,ν 满足 $\lambda+\mu+\nu=0$ 和 $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c}=\mathbf{0}$，不妨设 $\nu\neq 0$，则

$$\mathbf{c}=-\frac{\lambda}{\nu}\mathbf{a}-\frac{\mu}{\nu}\mathbf{b}.$$

由 $\lambda+\mu+\nu=0$ 得 $-\frac{\lambda}{\nu}-\frac{\mu}{\nu}=1$，故 $\mathbf{c}$ 是 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的仿射组合，从而 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 共线。 □

推论 1.1.1 (行列式形式的共线判别)**.** 在 $\mathbb{R}^2$ 中，三点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ 共线的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0.$$

在 $\mathbb{R}^3$ 中，三点 $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)$ 共线的充要条件是

$$\begin{bmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{bmatrix}\text{的秩}\leq 1.$$

定理 1.2 (四点共面的充要条件)**.** 设 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}$ 是向量空间 V 中的向量。则 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}$ 共面当且仅当存在不全为零的实数 λ,μ,ν,ξ，使得

$$\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c}+\xi\mathbf{d}=\mathbf{0}\quad \text{且}\quad \lambda+\mu+\nu+\xi=0.$$

特别地，当 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}$ 中任意三点不共线时，这等价于向量 $\mathbf{d}-\mathbf{a}$, $\mathbf{b}-\mathbf{a}$, $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ 线性相关。

推论 1.2.1 (行列式形式的共面判别)**.** 在 $\mathbb{R}^3$ 中，四点 $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3),(x_4,y_4,z_4)$ 共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}=0.$$

习题

1. 判断点 $A(1,2,3), B(2,3,5), C(3,4,7)$ 是否共线。

2. 判断点 $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1), D(1,1,1)$ 是否共面。

3. 设 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 是三个不共线的向量。证明：点 $\mathbf{x}$ 在由 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 确定的平面上当且仅当 $\det(\mathbf{x}-\mathbf{a},\mathbf{b}-\mathbf{a},\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$。

4. 证明：四点 A,B,C,D 共面当且仅当存在不全为零的实数 λ,μ,ν,ω 使得 $\lambda+\mu+\nu+\omega=0$ 且 $\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}+\omega\overrightarrow{OD}=\mathbf{0}$，其中 O 为任意取定的原点。

1.5 一般情形：m 个点落在 r 维仿射子空间中的条件

定理 1.3 (m 个点落在 r 维仿射子空间中的充要条件)**.** 设 V 是 n 维向量空间，$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_m\in V$。这些点落在某个 r 维仿射子空间中的充要条件是：矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_3-\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_m-\mathbf{v}_1\end{pmatrix}$$

的秩不超过 r，其中每个 $\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_1$ 视为列向量。

特别地，m 个点落在 $m-2$ 维仿射子空间中的充要条件是：上述矩阵 A 的秩 $\le m-2$，即这 $m-1$ 个向量线性相关。

证明. 设这些点落在仿射子空间 $\mathbf{a}+W$ 中，其中 $\dim W=r$。则存在 $\mathbf{w}_i\in W$ 使得 $\mathbf{v}_i=\mathbf{a}+\mathbf{w}_i$。于是

$$\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_1=\mathbf{w}_i-\mathbf{w}_1\in W.$$

所以向量 $\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m-\mathbf{v}_1$ 都属于 r 维子空间 W，因此它们张成的子空间维数不超过 r，即矩阵 A 的秩 $\le r$。

反之，若矩阵 A 的秩为 $r'\le r$，令 $W=\operatorname{span}\{\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m-\mathbf{v}_1\}$，则 $\dim W=r'\le r$，且所有点 $\mathbf{v}_i$ 都在仿射子空间 $\mathbf{v}_1+W$ 中，其维数为 $r'\le r$。通过取 W 的适当扩大的子空间，可以得到 r 维仿射子空间包含这些点。 □

注 1.4. 作为特例：

1. 当 $m=3,r=1$ 时，得到三点共线的条件：$\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1$ 与 $\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_1$ 线性相关。

2. 当 $m=4,r=2$ 时，得到四点共面的条件：$\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_4-\mathbf{v}_1$ 线性相关。

例 1.3. 判断点 $\mathbf{v}_1=(1,0,0),\mathbf{v}_2=(0,1,0),\mathbf{v}_3=(0,0,1),\mathbf{v}_4=(1,1,1)$ 是否共面。

解：构造向量

$$\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1=(-1,1,0),\quad \mathbf{v}_3-\mathbf{v}_1=(-1,0,1),\quad \mathbf{v}_4-\mathbf{v}_1=(0,1,1).$$

计算行列式

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 = -1(-1) - 1(-1) = 1 + 1 = 2 \neq 0.$$

所以这三个向量线性无关，秩为 3，大于 2。因此四点不共面（实际上它们构成一个四面体的顶点）。

2 仿射空间

2.1 仿射空间的定义

在之前的讨论中，我们研究了向量空间及其仿射子空间。向量空间有一个特殊的点——原点 $\mathbf{0}$，这使得我们可以将向量与点等同。但在纯粹的几何中，点与向量是有区别的：点代表位置，向量代表位移。这种区别引出了**仿射空间**的概念。

定义 2.1 (仿射空间)**.** 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，A 是一个非空集合。如果存在映射 $+ : A \times V \to A$，记作 $(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{p} + \mathbf{v}$，满足：

1. 对任意 $\mathbf{p} \in A$，$\mathbf{p} + \mathbf{0} = \mathbf{p}$；
2. 对任意 $\mathbf{p} \in A$，$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$，有 $(\mathbf{p} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{p} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$；
3. 对任意 $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in A$，存在唯一的向量 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \mathbf{v}$，记作 $\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathbf{pq}}$。

则称 A 是一个**仿射空间**，A 中的元素称为**点**。$\dim V$ 称为 A 的**维数**。

注 2.1. 仿射空间与向量空间的本质区别在于：向量空间有自然指定的原点 $\mathbf{0}$，而仿射空间中没有这样的特殊点。在仿射空间中，所有点都是平等的，我们只能通过向量来表示点之间的相对位置。这正是“仿射”一词的原意——点与点之间的“邻近关系”才是基本的。

2.2 原点的选取与坐标化

尽管仿射空间没有天然的原点，但我们可以通过任意选定一个点作为“原点”，从而将仿射空间与向量空间等同起来。

定理 2.1 (仿射空间与向量空间的同构)**.** 设 A 是以 V 为伴随向量空间的仿射空间。任取一点 $O \in A$，定义映射

$$\Phi_O : A \to V, \quad \Phi_O(\mathbf{p}) = \overrightarrow{O\mathbf{p}}.$$

则 Φ_O 是一个一一对应（双射），且满足：

$$\Phi_O(\mathbf{p}+\mathbf{v}) = \Phi_O(\mathbf{p}) + \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{p} \in A, \mathbf{v} \in V.$$

换句话说，通过选定原点 O，我们可以将仿射空间 A 与向量空间 V 等同起来：每个点 $\mathbf{p}$ 对应一个唯一的向量（位置向量）。

证明. 首先，由定义，对每个 $\mathbf{p}$，$\overrightarrow{O\mathbf{p}}$ 是 V 中唯一确定的向量。若 $\Phi_O(\mathbf{p}) = \Phi_O(\mathbf{q})$，则 $\overrightarrow{O\mathbf{p}} = \overrightarrow{O\mathbf{q}}$, 从而 $\mathbf{q} = O + \overrightarrow{O\mathbf{q}} = O + \overrightarrow{O\mathbf{p}} = \mathbf{p}$, 故 Φ_O 是单射。对任意 $\mathbf{v} \in V$, 取 $\mathbf{p} = O + \mathbf{v}$, 则 $\Phi_O(\mathbf{p}) = \mathbf{v}$，故 Φ_O 是满射。因此 Φ_O 是双射。性质 $\Phi_O(\mathbf{p}+\mathbf{v}) = \Phi_O(\mathbf{p}) + \mathbf{v}$ 可直接验证。 □

这个定理表明：一旦选定原点，仿射空间就变成了向量空间。因此，我们通常将 $\mathbb{F}^n$ 既视为向量空间（以原点为基准），也视为仿射空间（点集）。在几何问题中，我们往往需要同时使用这两种观点。

2.3 仿射坐标系

将原点和基结合起来，就得到了仿射空间中的坐标系。

定义 2.2 (仿射坐标系)**.** 设 A 是 n 维仿射空间, $O \in A$ 是一个点(称为原点), $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ 是伴随向量空间 V 的一个基。则 $(O; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ 定义了 A 上的一个**仿射坐标系**。

在仿射坐标系下，任意点 $P \in A$ 的位置向量 $\overrightarrow{OP}$ 可以唯一地表示为基的线性组合：

$$\overrightarrow{OP} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n.$$

我们称有序数组 $(x_1, \ldots, x_n)$ 为点 P 在该仿射坐标系下的**坐标**。

注 2.2. 注意区分点的坐标与向量的坐标：点 P 的坐标依赖于原点的选取，而向量 $\mathbf{v}$ 的坐标只依赖于基的选取。当原点改变时，点的坐标会发生变化，但向量的坐标保持不变（因为向量与原点无关）。

通过仿射坐标系，我们将抽象的仿射空间具体化为 $\mathbb{F}^n$：每个点对应一个坐标 n 元组，每个向量对应一个坐标 n 元组。这正是在解析几何中我们一直在做的事情——用坐标研究几何。

2.4 坐标变换

在几何问题中，我们经常需要变换坐标系。例如，为了简化方程，我们可能将原点移动到曲线的中心等。坐标变换公式描述了同一个点在不同坐标系下的坐标之间的关系。

定义 2.3 (坐标变换公式). 设有两个仿射坐标系：旧系 $(O;\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$ 和新系 $(O';\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_n)$。设新原点 O' 在旧系中的坐标为 $(a_1,\ldots,a_n)$，新基向量在旧基下的坐标为：

$$\mathbf{e}'_j = p_{1j}\mathbf{e}_1 + p_{2j}\mathbf{e}_2 + \cdots + p_{nj}\mathbf{e}_n, \quad j = 1,\ldots,n.$$

则点 P 的旧坐标 $(x_1,\ldots,x_n)$ 与新坐标 $(x'_1,\ldots,x'_n)$ 之间的关系为：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix},$$

其中 $P = (p_{ij})$ 是过渡矩阵（可逆）。这可以写成更紧凑的齐次坐标形式：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} & a_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

证明. 由 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$，即

$$\sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n a_i\mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^n x'_j\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^n a_i\mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^n x'_j \sum_{i=1}^n p_{ij}\mathbf{e}_i.$$

比较 $\mathbf{e}_i$ 的系数即得 $x_i = a_i + \sum_{j=1}^n p_{ij}x'_j$，即矩阵形式。 □

习题

1. 在 $\mathbb{R}^2$ 中，取基 $\mathbf{e}_1 = (1,1), \mathbf{e}_2 = (1,-1)$，求向量 $\mathbf{v} = (3,2)$ 在该基下的坐标。
2. 设有两个仿射坐标系：旧系 $(O;\mathbf{i},\mathbf{j})$，新系 $(O';\mathbf{i}',\mathbf{j}')$，其中 $O' = (2,1)$ 在旧系中，$\mathbf{i}' = \mathbf{i}+\mathbf{j}, \mathbf{j}' = \mathbf{i}-\mathbf{j}$。求坐标变换公式，并将点 P 的新坐标 $(1,2)$ 转换为旧坐标。
3. 证明：过渡矩阵 P 是可逆的，且其逆矩阵给出了从新坐标到旧坐标的变换。
4. 在 $\mathbb{R}^3$ 中，给定两组基 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ 和 $\{\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3\}$，其中 $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3+\mathbf{e}_1$。求从 $\{\mathbf{e}_i\}$ 到 $\{\mathbf{f}_i\}$ 的过渡矩阵，以及向量 $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3$ 在 $\{\mathbf{f}_i\}$ 下的坐标。
5. 证明：通过选定原点，仿射空间 A 与伴随向量空间 V 之间的对应 Φ_O 保持向量的加法，即 $\overrightarrow{O(\mathbf{p}+\mathbf{v})} = \overrightarrow{O\mathbf{p}} + \mathbf{v}$。

2.5 仿射子空间

定义 2.4 (仿射子空间)**.** 设 A 是以 V 为伴随向量空间的仿射空间。非空子集 $B \subseteq A$ 称为 A 的一个**仿射子空间**，如果存在一点 $\mathbf{p} \in B$ 和一个线性子空间 $W \subseteq V$，使得

$$B = \mathbf{p} + W := \{\mathbf{p} + \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in W\}.$$

注 2.3. 定义中的 $\mathbf{p}$ 可以任意选取，因为若 $\mathbf{q} \in B$，则 $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \mathbf{w}_0$，从而 $B = \mathbf{q} + W$。因此，方向子空间 W 由 B 唯一确定，而 $\mathbf{p}$ 的选取是自由的。

注 2.4. 仿射子空间也可以内蕴地刻画：$B \subseteq A$ 是仿射子空间当且仅当 B 自身（在从 A 继承的加法下）构成一个仿射空间，其伴随向量空间是 V 的某个子空间。具体地，定义 $W_B = \{\overrightarrow{\mathbf{pq}} \mid \mathbf{p}, \mathbf{q} \in B\}$，则 W_B 是 V 的线性子空间，且对任意 $\mathbf{p} \in B$，有 $B = \mathbf{p} + W_B$。

定理 2.2 (仿射子空间的等价刻画)**.** 设 A 是仿射空间，$B \subseteq A$ 非空。则 B 是仿射子空间当且仅当对任意 $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in B$ 和任意实数 λ，有

$$\mathbf{p} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{qr}} \in B.$$

证明. 若 $B = \mathbf{p}_0 + W$ 是仿射子空间，则对任意 $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in B$，记 $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{w}_p$，$\mathbf{q} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{w}_q$，$\mathbf{r} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{w}_r$，则 $\overrightarrow{\mathbf{qr}} = \mathbf{w}_r - \mathbf{w}_q \in W$，从而 $\mathbf{p} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{qr}} = \mathbf{p}_0 + (\mathbf{w}_p + \lambda(\mathbf{w}_r - \mathbf{w}_q)) \in \mathbf{p}_0 + W = B$。反之，若该条件成立，任取 $\mathbf{p}_0 \in B$，令 $W = \{\overrightarrow{\mathbf{p}_0\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in B\}$，可证 W 是线性子空间，且 $B = \mathbf{p}_0 + W$。 □

注 2.5. 这个刻画表明，仿射子空间对“加权平均”运算封闭：任意点加上任意方向（由子空间中的两点确定）的任意倍数仍在该子空间中。这正是仿射结构的本质。

注 2.6 (与向量空间中仿射子空间的关系)**.** 若我们选定一个原点 $O \in A$，则通过映射 $\Phi_O : A \to V$，A 与 V 等同。此时 A 中的仿射子空间 $B = \mathbf{p} + W$ 对应于 V 中的仿射子空间 $\Phi_O(B) = \Phi_O(\mathbf{p}) + W$。因此，抽象定义与第一章中给出的向量空间中的仿射子空间概念完全一致。

定理 2.3 (仿射空间中点落在仿射子空间的条件)**.** 设 A 是以 V 为伴随向量空间的仿射空间，$P_1, P_2, \ldots, P_r \in A$。则这些点落在 A 的某个 m 维仿射子空间中的充要条件是：向量组

$$\{\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r}\} \subset V$$

生成的线性子空间 W 的维数不超过 m。

证明. 若这些点落在某个 m 维仿射子空间 $B = Q + W$ 中（W 是 V 的 m 维子空间，$Q \in A$），则对任意 i，存在 $\mathbf{w}_i \in W$ 使得 $P_i = Q + \mathbf{w}_i$。于是

$$\overrightarrow{P_1P_i} = \overrightarrow{(Q + \mathbf{w}_1)(Q + \mathbf{w}_i)} = \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_1 \in W.$$

因此所有 $\overrightarrow{P_1P_i}$ 都属于 W，从而它们张成的子空间包含于 W，维数 $\le m$。

反之，设 $\operatorname{span}\{\overrightarrow{P_1P_2},\dots,\overrightarrow{P_1P_r}\}$ 的维数为 $s\le m$，令 $W=\operatorname{span}\{\overrightarrow{P_1P_2},\dots,\overrightarrow{P_1P_r}\}$，则 W 是 V 的 s 维子空间。考虑仿射子空间 $B=P_1+W$。由于对每个 i，$\overrightarrow{P_1P_i}\in W$，故 $P_i=P_1+\overrightarrow{P_1P_i}\in B$。因此所有点都在 B 中，而 B 是 s 维仿射子空间。由于 $s\le m$，我们总可以将 W 扩大为一个 m 维子空间 W'（例如取 W 与某个 $m-s$ 维子空间的直和），则 P_1+W' 是包含这些点的 m 维仿射子空间。 □

注 2.7. 该条件不依赖于基点 P_1 的选择：若换成 P_k 作为基点，则向量组 $\{\overrightarrow{P_kP_i}\}_{i\neq k}$ 张成的子空间与 $\{\overrightarrow{P_1P_i}\}_{i>1}$ 张成的子空间相同（因为 $\overrightarrow{P_kP_i}=\overrightarrow{P_kP_1}+\overrightarrow{P_1P_i}$，且 $\overrightarrow{P_kP_1}=-\overrightarrow{P_1P_k}$ 已在前者中）。因此条件具有内蕴性。

推论 2.3.1 (三点共线的条件)**.** 三点 P_1,P_2,P_3 共线（即落在 1 维仿射子空间中）当且仅当 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 与 $\overrightarrow{P_1P_3}$ 线性相关。

推论 2.3.2 (四点共面的条件)**.** 在三维仿射空间 A 中，四点 P_1,P_2,P_3,P_4 共面（即落在 2 维仿射子空间中）当且仅当 $\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3},\overrightarrow{P_1P_4}$ 线性相关。

注 2.8. 对 A 取定仿射坐标系后，我们可将其等同于 $\mathbb{F}^{\dim A}$, 从而可以使用前一章的行列式判别法等。

2.6 从参数表示到方程组

给定一个 m 维仿射子空间 $S=P_0+W$，其中 $W\subseteq V$ 是 m 维线性子空间。在取定一个仿射坐标系后 $(O,\mathbf{e_1},\dots,\mathbf{e_n})$，点可以用坐标表示，我们希望能用一组线性方程来刻画 S。在仿射坐标系下，设 P_0 的坐标为 $(p_1,\dots,p_n)$。取 W 的一组基 $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m$，并将它们写成列向量

$$\mathbf{w}_j=(w_{1j},w_{2j},\dots,w_{nj})^{\mathsf{T}},\quad j=1,\dots,m.$$

则点 $X=(x_1,\dots,x_n)$ 属于 S 当且仅当存在参数 $t_1,\dots,t_m\in\mathbb{F}$ 使得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\\vdots\\p_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w_{11}&w_{12}&\cdots&w_{1m}\\w_{21}&w_{22}&\cdots&w_{2m}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\w_{n1}&w_{n2}&\cdots&w_{nm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1\\t_2\\\vdots\\t_m\end{pmatrix}.\tag{1}$$

这是一个关于 $t_1,\dots,t_m$ 的线性方程组，它有解当且仅当 $X-P_0$ 位于矩阵 $B=(w_{ij})$ 的列空间中。由于 B 的秩为 m，它的左零空间维数为 $n-m$，即存在 $n-m$ 个线性无关的行向量 $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-m}$（每个 $\mathbf{a}_i$ 是 n 维行向量），使得

$$\mathbf{a}_iB=\mathbf{0},\quad i=1,\dots,n-m.$$

将这些行向量记为 $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$，则对任意 $X \in S$ 有

$$\mathbf{a}_i(X - P_0) = 0, \quad i = 1, \ldots, n-m,$$

即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - p_j) = 0, \quad i = 1, \ldots, n-m. \tag{2}$$

这 $n-m$ 个方程就是 S 的方程组表示。它们彼此独立，因为行向量 $\mathbf{a}_i$ 线性无关。反之，若 X 满足 (2)，则 $X - P_0$ 与所有 $\mathbf{a}_i$ 正交，从而属于 B 的列空间，故 $X \in S$。

因此，一个 m 维仿射子空间总可以由 $n-m$ 个独立的线性方程联立描述。特别地，当 $m = n-1$ 时只有一个方程，即超平面的方程。

例 2.1 (三维空间中的直线)**.** 在 $\mathbb{R}^3$ 中，取过点 $P_0 = (1,2,3)$、方向为 $\mathbf{v} = (1,0,1)$ 的直线。W 由 $\mathbf{v}$ 张成，矩阵 $B = (1,0,1)^{\mathsf{T}}$ 是 3×1 矩阵。需要找两个线性无关的行向量与 B 正交，即满足 $a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 1 = 0$。可取

$$\mathbf{a}_1 = (1,0,-1), \quad \mathbf{a}_2 = (0,1,0).$$

于是直线方程为

$$\begin{cases} 1 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y-2) + (-1) \cdot (z-3) = 0, \\ 0 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-2) + 0 \cdot (z-3) = 0, \end{cases}$$

即 $x - z + 2 = 0$ 且 $y = 2$。

3 仿射变换

3.1 仿射变换的定义

定义 3.1 (仿射变换)**.** 设 A 和 A' 是两个仿射空间，分别以 V 和 V' 为伴随向量空间。映射 $\Phi : A \to A'$ 称为**仿射变换**（或仿射映射），如果存在线性单射 $\varphi : V \to V'$，使得对任意 $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in A$，有

$$\overrightarrow{\Phi(\mathbf{p})\Phi(\mathbf{q})} = \varphi(\overrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{q}}).$$

换句话说，仿射变换在“点”的层面上可以任意移动，但在“向量”的层面上必须是线性的。

定理 3.1. 如果仿射变换 Φ 有不动点 O，则在以 O 为原点的坐标系中，Φ 退化为线性变换 φ。

注 3.1. 如果选定一个原点 $O \in A$，记 $O' = \Phi(O)$，则对任意点 $\mathbf{p}$，有

$$\Phi(\mathbf{p}) = O' + \varphi(\overrightarrow{O\mathbf{p}}).$$

这就是仿射变换的常见形式：线性部分 φ 加上平移 O'。

所有仿射自同构 $\Phi: A \to A$ 在映射的复合运算下构成一个群，称为 A 的**仿射变换群**，记作 $\mathrm{Aff}(A)$ 或 $\mathrm{Aff}(n,\mathbb{F})$ 这里 $n = \dim A$。任取一个仿射坐标系，每个可逆仿射变换可唯一表示为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 $M \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$，$\mathbf{t} \in \mathbb{F}^n$。因此 $\mathrm{Aff}(n,\mathbb{F})$ 同构于矩阵群

$$\left\{ \begin{pmatrix} M & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, M \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F}),\ \mathbf{t} \in \mathbb{F}^n \right\},$$

它是 $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{F})$ 的子群，且可表示为半直积 $\mathbb{F}^n \rtimes \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$，其中平移部分构成正规子群。

3.2 仿射变换的基本性质

我们仅从定义出发，来推导仿射变换的核心性质。

定理 3.2 (仿射变换保持仿射子空间)**.** 设 $\Phi : A \to A'$ 是仿射映射，即存在线性映射 $\varphi: V \to V'$ 使得对任意 $P, Q \in A$ 有

$$\overrightarrow{\Phi(P)\Phi(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ}).$$

若 $S \subseteq A$ 是一个 m 维仿射子空间，则 $\Phi(S) \subseteq A'$ 是一个维数是 m 的仿射子空间。

证明. 取 $P_0 \in S$，则 $\Phi(S) = \Phi(P_0) + \varphi(W)$，而 $\varphi(W)$ 是 m 维线性子空间，所以 $\Phi(S)$ 是仿射子空间。 □

推论 3.2.1. 在仿射变换下，点共线、共面等性质保持不变。更一般地，r 个点落在 m 维仿射子空间中这一性质是仿射不变的。

定理 3.3 (实数域上仿射变换的逆向刻画)**.** 设 A 和 A' 是实数域上的仿射空间（维数 $n \geq 2$），伴随向量空间分别为 V 和 V'。设 $f : A \to A'$ 是一个连续单射，满足：对 A 中的任意直线 $l \subseteq A$，像集 $f(l)$ 是 A' 中的一条直线，则 f 是仿射映射。

证明. 在 A 中任选一点 O，定义映射 $g: V \to V'$ 为

$$g(\mathbf{v}) = \overrightarrow{f(O)\, f(O+\mathbf{v})}.$$

则 $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$，且 f 是仿射映射当且仅当 g 是线性映射。平移不改变直线性质，因此 g 也将 V 中每条直线映为 V' 中的一条直线或一个点，且 g 连续。

Step 1. 证明 g 是加性的 首先证明 f 保持平行性。设 l_1 和 l_2 是 V 中两条平行直线，若它们不相交，则它们的像也不相交（否则与单射矛盾），因此像是平行直线。

现在取任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$，考虑点 $O,P:=O+\mathbf{u},Q:=O+\mathbf{v},R:=O+\mathbf{u}+\mathbf{v}$。它们构成一个平行四边形的顶点。由于 f 保平行性，四边形 $f(O),f(P),f(Q),f(R)$ 是一个平行四边形的顶点，从而由平行四边形法则

$$g(\mathbf{u}+\mathbf{v})=g(\mathbf{u})+g(\mathbf{v}).$$

Step 2. 证明 g 是齐次的 由加性，对任意有理数 q，有 $g(q\mathbf{v})=qg(\mathbf{v})$。现固定非零向量 $\mathbf{v}$，考虑直线 $l=\{t\mathbf{v}\mid t\in\mathbb{R}\}$。其像 $g(l)$ 是一条过原点的直线。由连续性 $g(t\mathbf{v})=tg(\mathbf{v})$。

由加性和齐次性，g 是线性映射。因此 f 是仿射变换。 □

注 3.2. 上述证明中，我们使用了实数域上可加函数连续则必为线性这一事实。这依赖于实数域的序结构和连续性。若域不是 $\mathbb{R}$，结论可能不成立。下面给出一个反例。

例 3.1 (复数域上的反例)**.** 取域 $F=\mathbb{C}$，考虑共轭映射 $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ 定义为

$$f(z_1,\ldots,z_n)=(\overline{z_1},\ldots,\overline{z_n}),$$

其中 $\bar{z}$ 表示复共轭。则:

- 对任意复直线 $L=\{\mathbf{a}+t\mathbf{b}\mid t\in\mathbb{C}\}$，其像为

  $$f(L)=\{\bar{\mathbf{a}}+\bar{t}\bar{\mathbf{b}}\mid t\in\mathbb{C}\}=\{\bar{\mathbf{a}}+s\bar{\mathbf{b}}\mid s\in\mathbb{C}\},$$

  仍是一条复直线。因此 f 将每条直线映为直线。

- 但 f 不是 $\mathbb{C}$-线性映射，例如对 $i\in\mathbb{C}$ 有 $f(i\mathbf{z})=-if(\mathbf{z})\neq if(\mathbf{z})$，所以 f 不是关于域 $\mathbb{C}$ 的仿射变换。

这个反例表明，当域存在非平凡自同构时，存在保持直线结构的非仿射映射。

注 3.3. 在实数域上，由于 $\mathbb{R}$ 只有恒等自同构，且连续加性函数必为线性，因此定理成立。在一般域上，需要额外条件（如域无自同构，或映射连续等）才能保证仿射性。

3.3 仿射不变量

从内蕴定义出发，我们可以发现一些在仿射变换下保持不变的量——这些量刻画了图形的仿射本质。

定义 3.2 (单比)**.** 设 A,B,C 是共线的三点，且 $A\neq C$。它们的**单比**（或简比）定义为

$$(B,C;A)=\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}}.$$

由定义，仿射变换保持共线三点的单比不变。

定理 3.4 (平行线段比不变)**.** 两条平行线段之比在仿射变换下保持不变。

证明. 设 $AB\parallel CD$，则存在 λ 使得 $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{AB}$。在仿射变换下，$\overrightarrow{C'D'}=\varphi(\overrightarrow{CD})=\lambda\varphi(\overrightarrow{AB})=\lambda\overrightarrow{A'B'}$，因此 $|\overrightarrow{C'D'}|/|\overrightarrow{A'B'}|=|\lambda|$ 保持不变。 □

3.4 埃尔朗根纲领的观点

现在我们可以从更宏观的视角理解本章的内容：

几何学	变换群	基本不变量
欧氏几何	刚体运动群（保距变换）	长度、角度、面积
仿射几何	仿射变换群	共线性、平行性、单比、面积比
射影几何	射影变换群	共线性、交比

仿射几何位于欧氏几何和射影几何之间：它比欧氏几何更"宽松"（允许伸缩和错切），但比射影几何更"严格"（保持平行性）。从变换群的角度看，我们有如下包含关系：

$$\text{刚体运动群} \subset \text{相似变换群} \subset \text{仿射变换群} \subset \text{射影变换群}.$$

变换群越大，保留的性质越少，几何学的研究对象就越"粗糙"但同时也更"本质"。

注 3.4. 在下一章我们将看到，如果在射影平面中固定一条直线（称为"无穷远直线"），那么保持这条直线不变的射影变换恰好构成一个与仿射变换群同构的子群。这揭示了仿射几何是射影几何在选定一条"无穷远直线"后的特例。

3.5 应用与实例

在仿射几何中，通过仿射变换可以互化的图形被认为是等价的：

- 所有三角形都与正三角形仿射等价；
- 所有平行四边形都与正方形仿射等价；
- 所有椭圆都与圆仿射等价；
- 所有双曲线都与等轴双曲线仿射等价。

这意味着，在研究图形的仿射性质时，我们可以选择最简单的代表元（如正三角形、圆）进行分析，然后将结论通过仿射变换推广到一般情形。

习题

1. 证明：仿射变换保持三角形的重心不变（即三角形重心的像等于像三角形的重心）。
2. 求平面仿射变换，它将点 $(0,0),(1,0),(0,1)$ 分别映射到 $(1,2),(3,3),(2,5)$。

4 范数与内积

4.1 范数：向量长度的推广

定义 4.1 (范数)**.** 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，函数 $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ 称为 V 上的一个**范数**，如果满足：

1. **正定性**：$\|\mathbf{v}\| \geq 0$，且 $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$
2. **齐次性**：$\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{v}\|$，$\forall \alpha \in \mathbb{F}, \mathbf{v} \in V$
3. **三角不等式**：$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$，$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

称 $(V, \|\cdot\|)$ 为**赋范线性空间**。

例 4.1. 常见的范数：

1. $\mathbb{R}^n$ 上的欧几里得范数（l^2 范数）：$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
2. $\mathbb{R}^n$ 上的 l^p 范数（$p \geq 1$）：$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$
3. $\mathbb{R}^n$ 上的 l^∞ 范数：$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$
4. 矩阵的 Frobenius 范数：$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$

注 4.1. 在几何中，我们通常使用欧几里得范数，它源于勾股定理，具有旋转不变性。但不同的范数定义了不同的几何，如 l^1 范数对应曼哈顿距离，l^∞ 范数对应切比雪夫距离。

4.2 内积：角度与正交性的基础

定义 4.2 (内积)**.** 假设 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$. 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，函数 $\langle\cdot,\cdot\rangle: V \times V \to \mathbb{F}$ 称为 V 上的**内积**，如果满足：

1. **正定性**：$\langle\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，且 $\langle\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$
2. **共轭对称性**：$\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \overline{\langle\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle}$
3. **线性性**：$\langle\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \alpha\langle\mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle + \beta\langle\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$

这里 $\overline{z}$ 表示 z 的复共轭（在实向量空间中等同于对称性）。如果 $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$，则称 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ **正交**，记作 $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$。

定理 4.1 (内积诱导范数)**.** 如果 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 V 上的内积，则 $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}$ 定义了 V 上的一个范数。

定义 4.3 (夹角)**.** 在实内积空间中，定义向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 之间的**夹角** θ 为：

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}, \quad 0 \le \theta \le \pi$$

例 4.2 (标准内积)**.** $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积（点积）为：

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

由此诱导的范数就是欧几里得范数。

习题

1. 证明：在 $\mathbb{R}^n$ 中，$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ 满足范数的定义。
2. 计算向量 $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$ 和 $\mathbf{v} = (-2, 1, 2)$ 的内积、长度和夹角（在标准内积下）。
3. 设 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 是内积空间中的非零向量。证明：$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ 当且仅当 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 同向（即存在 $\lambda > 0$ 使得 $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$）。

4.3 仿射空间与内积空间

设 A 是一个仿射空间，其伴随向量空间为 V。假设 V 上赋予了一个内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$。此时，$A$ 中两点 P, Q 的距离定义为

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle}.$$

在实内积空间中，还可以定义向量间的夹角；在复内积空间中，虽然不能直接定义实数值的夹角，但可以定义正交性

定义 4.4 (仿射子空间的正交)**.** 设 $S_1 = P_1 + W_1$ 和 $S_2 = P_2 + W_2$ 是 A 中的两个仿射子空间。称 S_1 与 S_2 **正交**，如果它们的方向子空间 W_1 与 W_2 正交，即对任意 $\mathbf{w}_1 \in W_1$ 和 $\mathbf{w}_2 \in W_2$，有 $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = 0$。

注意，正交性只依赖于方向，与子空间的位置无关。例如，在实空间中，两条直线垂直当且仅当它们的方向向量内积为零；在复空间中，我们仍说两条直线正交，如果它们的方向向量内积为零（此时内积是 Hermite 内积，正交条件仍为 $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = 0$）。

定义 4.5 (超平面的法向量)**.** 设 $H = P_0 + W$ 是 A 中的一个超平面。任一非零向量 $\mathbf{n} \in W^\perp$ 称为 H 的一个**法向量**。若 $\|\mathbf{n}\| = 1$，则称其为**单位法向量**。

由于 $W^\perp$ 是一维的，所有法向量彼此共线。在实空间中，超平面将空间分成两个半空间，法向量的方向可以用于指定其中一个半空间；在复空间中，虽然没有“半空间”的概念，但法向量仍可用于表示超平面方程。

定理 4.2 (超平面的点法式方程)**.** 设 H 是过点 P_0 且以 $\mathbf{n}$ 为法向量的超平面，则点 $\mathbf{a} \in A$ 位于 H 上当且仅当

$$\langle \mathbf{n},\ \overrightarrow{P_0 a} \rangle = 0.$$

若取定一个仿射坐标系，将点的坐标代入即得超平面的线性方程。在实 $\mathbb{R}^n$ 中，超平面方程可写为 $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$，其中 $(a_1, \ldots, a_n)$ 是法向量分量。在复 $\mathbb{C}^n$ 中，方程形如 $\sum a_i\overline{x_i} = c$ 或 $\sum \overline{a_i}x_i = c$，取决于内积的约定（通常取第一个变量线性，第二个变量共轭线性）。

4.4 点到仿射子空间的距离与正交投影

设 $S = P_0 + W$ 是 A 中的一个仿射子空间，$Q \in A$ 是任意一点。我们欲求 Q 到 S 的最短距离，以及 S 上离 Q 最近的点（称为 Q 在 S 上的正交投影）。

定理 4.3 (正交投影的存在唯一性)**.** 对于任意点 Q, 存在唯一的点 $R \in S$ 使得 $\overrightarrow{RQ} \perp W$（即 $\overrightarrow{RQ}$ 与 W 中所有向量正交）。这个点 R 称为 Q 在 S 上的**正交投影**，且满足

$$\|\overrightarrow{RQ}\| = \min_{X \in S} \|\overrightarrow{XQ}\|.$$

这个值称为 Q 到 S 的距离，记为 $d(Q, S)$。

证明. 令 $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0Q}$。在内积空间 V 中，存在唯一的正交分解 $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^\perp$，其中 $\mathbf{w} \in W$，$\mathbf{w}^\perp \in W^\perp$（这是内积空间的基本性质：对有限维子空间存在正交投影）。取 $R = P_0 + \mathbf{w}$，则 $\overrightarrow{RQ} = \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{w}^\perp \in W^\perp$，故 $\overrightarrow{RQ} \perp W$。对任意 $X = P_0 + \mathbf{w}' \in S$，有

$$\|\overrightarrow{XQ}\|^2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}'\|^2 = \|\mathbf{w}^\perp + (\mathbf{w} - \mathbf{w}')\|^2 = \|\mathbf{w}^\perp\|^2 + \|\mathbf{w} - \mathbf{w}'\|^2 \geq \|\mathbf{w}^\perp\|^2,$$

等号成立当且仅当 $\mathbf{w}' = \mathbf{w}$，即 $X = R$。因此 R 是唯一的最近点，且距离为 $\|\mathbf{w}^\perp\|$。 □

特别地，当 S 是超平面时，$\mathbf{w}^\perp$ 与法向量平行，距离公式简化为

$$d(Q, S) = \frac{|\langle \mathbf{n},\ \overrightarrow{P_0Q} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|},$$

其中 $\mathbf{n}$ 是任意法向量。

例 4.3 (例子：点到直线的投影)**.** 在 $\mathbb{R}^3$ 中，设直线 l 过点 P_0 方向为 $\mathbf{d}$（单位向量），则 $W = \operatorname{span}\{\mathbf{d}\}$。点 Q 到 l 的正交投影为

$$R = P_0 + \langle \overrightarrow{P_0Q}, \mathbf{d} \rangle \mathbf{d},$$

距离为 $\|\overrightarrow{P_0Q} - \langle \overrightarrow{P_0Q}, \mathbf{d} \rangle \mathbf{d}\|$。在复空间中，公式相同，但内积为 Hermite 内积。

5 向量运算的几何意义与外代数

5.1 外积

在三维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 中，我们可以定义外积（向量积），它不适用于一般的向量空间。

定义 5.1 (三维空间的外积)**.** 设 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$，它们的**外积**（或**向量积**）定义为：

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

其中 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的标准基向量。

定理 5.1 (外积的性质)**.** 对任意 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$，$\alpha \in \mathbb{R}$：

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ （反交换性）
2. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ 同时垂直于 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$
3. 拉格朗日恒等式：$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$
4. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \sin\theta$，其中 θ 是 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 的夹角, 也等于以 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 为邻边的平行四边形面积

证明. 设 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{F}^3$。

1. 由行列式性质，交换两行改变符号，故 $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$。直接计算也可验证。
2. 计算点积：
$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0,$$
同理 $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$。因此 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ 同时垂直于 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$。
3. **拉格朗日恒等式**：可直接展开或用 Cauchy-Binet 公式，我们在外代数会给出其另外解释。
4. **平行四边形面积**：以 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 为邻边的平行四边形面积为 $\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \sin\theta$，其中 θ 为两向量夹角。由拉格朗日恒等式可得
$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2(1 - \cos^2\theta) = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 \sin^2\theta,$$
因此 $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \sin\theta$。

$\square$

例 5.1. 求过三点 $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ 的平面的法向量和方程。

解：取 $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = (-1,1,0)$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC} = (-1,0,1)$，则法向量为

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,1,1).$$

平面方程为 $(x-1, y, z) \cdot (1,1,1) = 0$，即 $x + y + z = 1$。

5.2 标量三重积与混合积

定义 5.2 (标量三重积)**.** 三个向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ 的**标量三重积**定义为：

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

定理 5.2 (三重积的几何意义)**.** $|[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]|$ 等于以 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 为邻边的平行六面体的体积。特别地，$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = 0$ 当且仅当 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 共面。

定义 5.3 (向量三重积)**.** 三个向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ 的**向量三重积**定义为 $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$。

定理 5.3 (三重积公式)**.**

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$$

习题

1. 计算 $\mathbf{u} = (1,2,3)$ 与 $\mathbf{v} = (4,5,6)$ 的叉积，并验证其结果与 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 都正交。
2. 求以 $\mathbf{u} = (1,0,1), \mathbf{v} = (0,1,1), \mathbf{w} = (1,1,0)$ 为邻边的平行六面体的体积。
3. 计算 $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ 并验证向量三重积公式。

5.3 外代数初步

为了将外积的概念推广到高维空间，我们需要引入外代数的概念。

定义 5.4 (k-向量)**.** 对于向量空间 V 中的向量 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$，它们的**楔积**（wedge product）$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k$ 称为一个 k**-向量**（k-vector），或**外** k**-形式**。它满足以下性质：

1. **多重线性性**：对每个变量都是线性的。

2. **反对称性**：交换任意两个向量改变符号，即

$$\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_i \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_j \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k = -\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_j \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_i \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k.$$

3. **结合性**：$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$。

特别地，如果任意两个向量线性相关，则 $\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k = 0$。

定义 5.5 (外代数)**.** 设 V 是 n 维向量空间。所有 k-向量张成的空间记作 $\bigwedge^k V$，称为 V 的 k **次外幂**。特别地，$\bigwedge^1 V = V$，$\bigwedge^0 V = \mathbb{F}$（标量场）。

外代数是直和

$$\bigwedge V = \bigoplus_{k=0}^{n} \bigwedge^k V,$$

它是一个 2^n 维的向量空间。

定理 5.4. 设 $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ 是 V 的一组基。则 $\bigwedge^k V$ 的一组基由所有形如 $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_k}$（其中 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$）的 k-向量组成。因此

$$\dim \bigwedge^k V = \binom{n}{k}.$$

特别地，$\bigwedge^n V$ 是一维的，其基为 $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n$，称为**体积元**。

证明. 首先证明这些元素线性无关。假设存在系数 $a_{i_1 \cdots i_k} \in \mathbb{F}$ 使得

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1 \cdots i_k} \, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} = 0. \tag{1}$$

对任意一组固定的指标 $J = (j_1, \ldots, j_k)$，考虑线性映射 $\varphi_J : \bigwedge^k V \to \mathbb{F}$，其定义为：对任意可分解的 k-向量 $\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k$，将每个 $\mathbf{v}_s$ 用基展开为 $\mathbf{v}_s = \sum_{i=1}^n v_{si} \mathbf{e}_i$，则令

$$\varphi_J(\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k) = \det\big(v_{s,j_t}\big)_{s,t=1}^k.$$

由行列式的多重线性和反对称性，此定义可唯一地线性延拓为 $\bigwedge^k V$ 上的线性映射，且满足 $\varphi_J(\mathbf{e}_J) = 1$，而对 $I \neq J$ 有 $\varphi_J(\mathbf{e}_I) = 0$。将 φ_J 作用于上述等式两边，得 $a_J = 0$。由 J 的任意性，所有系数为零，故这些 k-向量线性无关。

其次证明它们张成 $\bigwedge^k V$。任意 $\omega \in \bigwedge^k V$ 可表示为一些可分解元素的线性组合，而每个可分解元素可写成 $\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k$。将每个 $\mathbf{v}_s$ 用基展开并利用楔积的多重线性性，得到一些基向量的楔积的线性组合，再通过反对称性将指标调整为递增顺序，即得 ω 可表为 $\mathbf{e}_I$ 的线性组合。因此这些 k-向量构成一组基，从而维数为 $\binom{n}{k}$。 □

命题 5.1. 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 是向量空间 V 中的 k 个向量，它们的楔积为 $\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k$。如果另一组向量 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ 可以由 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 线性表示，即存在系数矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{k\times k}$ 使得

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\mathbf{v}_j, \quad i = 1, \dots, k,$$

则它们的楔积满足

$$\mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_k = (\det A)\, \mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k.$$

证明. 由楔积的多重线性性，

$$\mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_k = \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{k} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k}\, \mathbf{v}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_{j_k}.$$

由于楔积的反对称性，只有当指标 $j_1, \dots, j_k$ 互异时，$\mathbf{v}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_{j_k}$ 才可能非零，且此时它等于 $\operatorname{sgn}(\sigma)\, \mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k$，其中 σ 是排列 $(1, \dots, k) \mapsto (j_1, \dots, j_k)$。因此上式化为

$$\left(\sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{k,\sigma(k)}\right) \mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k = (\det A)\, \mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k.$$

□

5.4 楔积与内积

定理 5.5 (楔积空间上的诱导内积)**.** 设 V 是一个实内积空间或复内积空间，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为其内积。则对于每个 k，外幂空间 $\bigwedge^k V$ 上存在唯一的内积（仍记作 $\langle\cdot,\cdot\rangle$），使得对任意 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \in V$，有

$$\langle \mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k,\ \mathbf{w}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{w}_k \rangle = \det\big(\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j\rangle\big)_{i,j=1}^{k}. \tag{1}$$

这个内积称为 $\bigwedge^k V$ 上的诱导内积。

证明. 我们以复情形为例进行证明,实情形完全类似。取 V 的一组标准正交基 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$，则 $\bigwedge^k V$ 有一组自然的基

$$\mathbf{e}_I := \mathbf{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_k}, \qquad I = (i_1 < \cdots < i_k).$$

现在，在 $\bigwedge^k V$ 上定义一个内积如下：对于任意 $\alpha = \sum_I a_I \mathbf{e}_I$ 和 $\beta = \sum_J b_J \mathbf{e}_J$，令

$$\langle \alpha, \beta\rangle := \sum_I a_I \overline{b_I}.$$

验证可分解元素满足行列式公式 设 $\alpha = \mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k$，$\beta = \mathbf{w}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{w}_k$。将每个 $\mathbf{v}_p$ 按基展开：

$$\mathbf{v}_p = \sum_{i=1}^{n} v_{pi}\mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{w}_q = \sum_{j=1}^{n} w_{qj}\mathbf{e}_j,$$

其中 $v_{pi}, w_{qj} \in \mathbb{C}$。则

$$\alpha = \sum_{i_1,\ldots,i_k} v_{1i_1}\cdots v_{ki_k}\mathbf{e}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_{i_k}.$$

由于楔积的反对称性，只有那些指标互不相同的项才可能非零。对于固定的指标集 $I = (i_1 < \cdots < i_k)$，所有使得 $\{i_1,\ldots,i_k\} = I$ 的有序组对应一个排列，合并同类项后得到

$$\alpha = \sum_I \left(\sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) v_{1,i_{\sigma(1)}}\cdots v_{k,i_{\sigma(k)}}\right)\mathbf{e}_I = \sum_I \det\big(v_{p,i_q}\big)_{p,q=1}^{k}\mathbf{e}_I.$$

类似地，

$$\beta = \sum_J \det\big(w_{p,j_q}\big)_{p,q=1}^{k}\mathbf{e}_J.$$

因此，由内积的定义，

$$\langle\alpha,\beta\rangle = \sum_I \det\big(v_{p,i_q}\big)\overline{\det\big(w_{p,i_q}\big)}. \tag{2}$$

另一方面，考虑矩阵 $M_{pq} = \langle\mathbf{v}_p,\mathbf{w}_q\rangle = \sum_{i=1}^n v_{pi}\overline{w_{qi}}$。将 V 的基代入，

$$M = VW^*,$$

其中 V 是 $k\times n$ 矩阵 (v_{pi}), W 是 $k\times n$ 矩阵 (w_{pj}), W^* 表示 W 的共轭转置。由 Cauchy–Binet 公式（复版本），

$$\det(VW^*) = \sum_I \det(V_I)\overline{\det(W_I)},$$

这里 I 跑遍所有 k 元指标集 $1\le i_1<\cdots<i_k\le n$，V_I 表示 V 中取指标 I 的列构成的 $k\times k$ 子矩阵。注意到 $\det(V_I) = \det(v_{p,i_q})$，$\det(W_I) = \det(w_{p,i_q})$，因此

$$\det\big(\langle\mathbf{v}_p,\mathbf{w}_q\rangle\big) = \sum_I \det\big(v_{p,i_q}\big)\overline{\det\big(w_{p,i_q}\big)}. \tag{3}$$

比较 (2) 与 (3) 即得

$$\langle\mathbf{v}_1\wedge\cdots\wedge\mathbf{v}_k,\ \mathbf{w}_1\wedge\cdots\wedge\mathbf{w}_k\rangle = \det\big(\langle\mathbf{v}_p,\mathbf{w}_q\rangle\big).$$

唯一性 若存在另一个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ 也满足 (1)，则它对基向量 $\mathbf{e}_I$ 有

$$\langle\mathbf{e}_I,\mathbf{e}_J\rangle' = \det\big(\langle\mathbf{e}_{i_p},\mathbf{e}_{j_q}\rangle\big) = \delta_{IJ},$$

即 $\{\mathbf{e}_I\}$ 关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ 也是标准正交基。因此对任意 α,β 展开，$\langle\alpha,\beta\rangle' = \sum a_I\overline{b_I}$，与构造的内积相同。故唯一性得证。 $\square$

定理 5.6 (三维空间中外积与楔积的保范同构). 在三维欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 中，存在一个保范同构 $\Phi : \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，使得对于任意 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$，有

$$\Phi(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

更具体地，取 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基 $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$，则 $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ 有基

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}, \quad \mathbf{i} \wedge \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \wedge \mathbf{k},$$

定义线性映射 Φ 为

$$\Phi(\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) = \mathbf{k}, \quad \Phi(\mathbf{i} \wedge \mathbf{k}) = -\mathbf{j}, \quad \Phi(\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) = \mathbf{i},$$

则 Φ 是保范同构，且对任意 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 满足上述关系。

证明. 首先 Φ 将标准正交基映为标准正交基，所以 Φ 是保范同构。

其次，对任意 $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$，$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$，由楔积的双线性性和反对称性得

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} + (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{i} \wedge \mathbf{k} + (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}.$$

应用 Φ 即得

$$\Phi(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i}$$

□

推论 5.6.1 (拉格朗日恒等式). 由上述保范同构，对任意 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$，有

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2.$$

证明.

$$\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|^2 = \det \begin{pmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \end{pmatrix} = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2.$$

□

定理 5.7 (拉格朗日恒等式在 n 维空间的推广). 在实内积空间 $\mathbb{R}^n$ 中，对任意向量 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$，有

$$\det(G) = \|\mathbf{u}_1\|^2\|\mathbf{u}_2\|^2 \cdots \|\mathbf{u}_k\|^2 \prod_{1 \le i < j \le k} \sin^2 \theta_{ij},$$

其中 $G = (\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle)_{1 \le i,j \le k}$ 是 Gram 矩阵，θ_{ij} 是 $\mathbf{u}_i$ 与 $\mathbf{u}_j$ 的夹角。特别地，当 $k = 2$ 时，这就是经典的拉格朗日恒等式。

注 5.1. Gram 矩阵的行列式 $\det(G)$ 的平方根等于由向量 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ 张成的平行多面体的 k 维体积。当 $\det(G) = 0$ 时，这些向量线性相关，对应的平行多面体退化为低维图形。

5.5 Hodge 对偶与法向量

定义 5.6 (Hodge 星算子). 设 V 是 n 维内积空间，具有定向（即选定了一个体积元 $\omega = \mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n$）。Hodge 星算子是线性映射 $\star : \bigwedge^k V \to \bigwedge^{n-k} V$，由下式定义：对任意 $\alpha \in \bigwedge^k V$，$\beta \in \bigwedge^{n-k} V$，

$$\alpha \wedge \beta = \langle \star\alpha, \beta \rangle \omega,$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\bigwedge^{n-k} V$ 上诱导的内积。

注 5.2. 直观上，Hodge 星算子将一个 k-向量映射为其正交补空间的 $(n-k)$-向量。特别地，对于超平面（$n-1$ 维子空间），Hodge 对偶将一个 $(n-1)$-向量映射为一个 1-向量，即一个法向量。

定理 5.8 (高维空间中的法向量). 在 n 维内积空间 V 中，设 H 是由向量 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ 张成的线性子空间。则 $\mathbf{n} = \star(\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_{n-1})$ 是 H 的一个法向量。

设 $\mathbb{R}^4$ 带有标准欧几里得内积，取定向相符的标准正交基 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$，体积元为 $\omega = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4$。Hodge 星算子 $\star : \bigwedge^k \mathbb{R}^4 \to \bigwedge^{4-k} \mathbb{R}^4$ 由定义唯一确定。在标准正交基下，$\star$ 作用于基 k-向量的结果由下表给出（约定 $\mathbf{e}_{ij\cdots} = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \cdots$，且指标递增）：

α	$\star\alpha$
1	$\mathbf{e}_{1234}$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_{234}$
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_{134}$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_{124}$
$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_{123}$
$\mathbf{e}_{12}$	$\mathbf{e}_{34}$
$\mathbf{e}_{13}$	$-\mathbf{e}_{24}$
$\mathbf{e}_{14}$	$\mathbf{e}_{23}$
$\mathbf{e}_{23}$	$\mathbf{e}_{14}$
$\mathbf{e}_{24}$	$-\mathbf{e}_{13}$
$\mathbf{e}_{34}$	$\mathbf{e}_{12}$
$\mathbf{e}_{234}$	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_{134}$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_{124}$	$-\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_{123}$	$\mathbf{e}_4$
$\mathbf{e}_{1234}$	1

符号的确定规则：对于 $\alpha = \mathbf{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_k}$，令其指标补集为 $\{j_1, \ldots, j_{4-k}\}$ 且递增排列，则 $\star\alpha = (-1)^\sigma \mathbf{e}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{j_{4-k}}$，其中 σ 是排列 $(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{4-k})$ 的奇偶性。上表已按此规则计算。

作为 Hodge 星算子的一个应用，考虑 $\mathbb{R}^4$ 中一个三维子空间（超平面），其法向量可由该子空间的一组基的楔积的 Hodge 对偶得到。具体地，设 $U = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的一个三维子空间，则 $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3 \in \bigwedge^3 \mathbb{R}^4$ 是一个非零的 3-向量，其 Hodge 对偶 $\star(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) \in \bigwedge^1 \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4$ 是一个与 U 正交的向量，即 U 的一个法向量。

例 5.2. 取三个向量

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, 1), \quad \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 1) \in \mathbb{R}^4.$$

它们线性无关，张成的子空间为 $U = \{(x, y, z, x + y + z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$。计算它们的楔积：

$$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3 = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4) \wedge (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4) \wedge (\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_{123} + \mathbf{e}_{124} - \mathbf{e}_{134} + \mathbf{e}_{234}.$$

利用 Hodge 星算子在 $\mathbb{R}^4$ 中的规则（参见上表）：

$$\star\mathbf{e}_{123} = \mathbf{e}_4, \quad \star\mathbf{e}_{124} = -\mathbf{e}_3, \quad \star\mathbf{e}_{134} = \mathbf{e}_2, \quad \star\mathbf{e}_{234} = -\mathbf{e}_1.$$

因此

$$\star(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) = \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 = (-1, -1, -1, 1).$$

容易验证 $(-1, -1, -1, 1)$ 与 U 中每个向量正交：对任意 $(x, y, z, x + y + z)$，点积为 $-x - y - z + (x + y + z) = 0$。故 $(-1, -1, -1, 1)$ 是 U 的一个法向量。

例 5.3 (四维空间中的法向量)**.** 在 $\mathbb{R}^4$ 中，已知超平面（三维）上的三个线性无关的向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$，则法向量 $\mathbf{n}$ 的分量为

$$n_i = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} u_j & u_k & u_l \\ v_j & v_k & v_l \\ w_j & w_k & w_l \end{vmatrix}, \quad (i, j, k, l) \text{ 是} (1, 2, 3, 4) \text{ 的偶置换}.$$

例如，

$$n_1 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ v_2 & v_3 & v_4 \\ w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}, \quad n_2 = -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}, \quad \text{等等}.$$

5.6 体积比

体积元不仅是度量几何的对象，更与外代数紧密相关。利用外代数，我们可以自然地将体积比定义为线性变换的行列式，并由此联系到微积分中的变量替换公式。

定义 5.7 (体积比)**.** 设 V 是 n 维内积空间，ω 是 V 的一个体积元（即 $\bigwedge^n V$ 中长度为 1 的元素）。对任意可逆线性变换 $\Phi : V \to V$，它诱导外幂上的映射 $\bigwedge^n \Phi : \bigwedge^n V \to \bigwedge^n V$，满足

$$\bigwedge^n \Phi(\omega) = (\det \Phi)\, \omega.$$

因此，Φ 将体积为 1 的平行多面体映为体积为 $|\det\Phi|$ 的平行多面体。一般地，对于任意平行多面体 $P(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$，其体积为 $|\omega(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)|$，经 Φ 作用后变为 $|\det\Phi|\cdot|\omega(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)|$。这个比值 $|\det\Phi|$ 称为 Φ 的**体积伸缩因子**，它与平行多面体的选择无关。

上述定义完全建立在外代数的基础上：行列式 $\det\Phi$ 正是通过 $\bigwedge^n\Phi$ 作用在体积元上的系数。这为微积分中更一般的变量替换提供了代数原型。在微积分中，考虑一个可微映射 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，其雅可比矩阵 $J_F(\mathbf{x})$ 在每点给出了 F 的局部线性近似。若 F 将区域 U 一一地映为 $V=F(U)$，则多重积分变量替换公式为

$$\int_V f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}=\int_U f(F(\mathbf{x}))\,|\det J_F(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}.$$

这里的 $|\det J_F(\mathbf{x})|$ 正是 F 在 $\mathbf{x}$ 处的体积伸缩因子——它局部地将体积元 $d\mathbf{x}$ 变为 $d\mathbf{y}$，与线性变换下的体积比完全一致。

从外微分的观点看，设 $\omega=dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的标准体积形式，则拉回满足 $F^*\omega=(\det J_F)\,\omega$。因此，变量替换公式本质上是外微分形式在积分下的行为。

6 保距变换

在欧几里得几何中，最基本的变换是保持图形形状和大小的运动，即刚体运动。这类变换在数学上称为保距变换。本节将系统研究保距变换的定义、性质及其与仿射变换的联系。

6.1 保距变换的定义

定义 6.1. 设 A 是一个欧氏仿射空间（即其伴随向量空间 V 带有内积）。一个映射 $f:A\to A$ 称为**保距变换**（或**等距变换**），如果它保持任意两点间的距离，即对任意 $P,Q\in A$，有

$$d(f(P),f(Q))=d(P,Q).$$

下面的定理表明在欧氏空间中，保距变换一定是仿射变换。

定理 6.1. 欧氏仿射空间中的任何保距变换都是仿射变换，且其线性部分是正交变换。

证明. 任取一点 $O\in A$，定义映射 $g:V\to V$ 为 $g(\overrightarrow{OX})=\overrightarrow{f(O)f(X)}$。由于 f 保距，g 保持向量长度：

$$\|g(\mathbf{v})\|=\|\mathbf{v}\|,\quad\forall\mathbf{v}\in V.$$

对任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$，由极化恒等式：

$$\langle g(\mathbf{u}),g(\mathbf{v})\rangle=\frac{1}{2}\big(\|g(\mathbf{u})\|^2+\|g(\mathbf{v})\|^2-\|g(\mathbf{u})-g(\mathbf{v})\|^2\big)=\frac{1}{2}\big(\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2\big)=\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle,$$

因此 g 保持内积。

现证 g 是线性的。

- **加法性**：对任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$，计算

  $$\begin{aligned}&\|g(\mathbf{u}+\mathbf{v})-g(\mathbf{u})-g(\mathbf{v})\|^2\\&=\|g(\mathbf{u}+\mathbf{v})\|^2+\|g(\mathbf{u})\|^2+\|g(\mathbf{v})\|^2-2\langle g(\mathbf{u}+\mathbf{v}),g(\mathbf{u})\rangle-2\langle g(\mathbf{u}+\mathbf{v}),g(\mathbf{v})\rangle+2\langle g(\mathbf{u}),g(\mathbf{v})\rangle.\end{aligned}$$

  利用 g 保持内积，将各内积替换为对应向量的内积，得

  $$=\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-2\langle\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle-2\langle\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle+2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\|\mathbf{u}+\mathbf{v}-\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2=0.$$

  因此 $g(\mathbf{u}+\mathbf{v})=g(\mathbf{u})+g(\mathbf{v})$。

- **齐次性**：先证对整数成立。由加法性，对正整数 n，$g(n\mathbf{v})=ng(\mathbf{v})$；对负整数，$g(-\mathbf{v})=-g(\mathbf{v})$（因为 $g(\mathbf{v})+g(-\mathbf{v})=g(0)=0$）。于是对任意有理数 $q=m/n$，有 $ng(q\mathbf{v})=g(nq\mathbf{v})=g(m\mathbf{v})=mg(\mathbf{v})$，故 $g(q\mathbf{v})=qg(\mathbf{v})$。

  对任意实数 λ，取有理数列 $q_k\to\lambda$，则由 g 的连续性（保距映射必连续）得 $g(\lambda\mathbf{v})=\lim g(q_k\mathbf{v})=\lim q_k g(\mathbf{v})=\lambda g(\mathbf{v})$。因此 g 是线性映射。

于是 g 是保持内积的线性变换，即正交变换。而 $f(X)=g(\overrightarrow{OX})+f(O)$ 正是仿射变换。 $\square$

因此，保距变换可写作

$$f(\mathbf{x})=R\mathbf{x}+\mathbf{t},$$

其中 R 是正交矩阵（即 $R^{\mathsf{T}}R=I$），$\mathbf{t}$ 是平移向量。所有保距变换构成的群称为**欧几里得运动群**，记作 $\mathrm{E}(n)$。

保距变换保持欧氏空间中的一切度量性质：距离、角度、面积、体积等（因为正交变换保持内积）。特别地，保距变换是仿射变换的一个子集，对应于线性部分为正交矩阵的情形。

6.2 保距变换的分类

正交矩阵 R 满足 $R^{\mathsf{T}}R=I$，从而 $\det R=\pm1$。当 $\det R=1$ 时，称为**旋转**（或**正常正交变换**）；当 $\det R=-1$ 时，称为**反射**（或**反常正交变换**）。在二维和三维空间中，正交矩阵对应的变换有明确的几何解释。

- **二维情形**：
  - 旋转：绕原点旋转角度 θ，矩阵为 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，行列式为 1。
  - 反射：关于某条过原点的直线反射，矩阵为 $\begin{pmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{pmatrix}$，行列式为 -1。

在二维欧氏平面中，任何保距变换可以表示为以下几种基本类型的复合：

1. **平移**：$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{t}$。
2. **旋转**：绕某点旋转一定角度。
3. **反射**：关于某条直线的反射。

6.3 例子

例 6.1 (平面旋转). 求绕点 $(1,1)$ 逆时针旋转 $90°$ 的保距变换表达式。

解：设旋转中心为 $C = (1,1)$。先平移使 C 到原点：$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - C$，然后旋转 $90°$：$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，最后平移回：$\mathbf{x}'' = R\mathbf{x}' + C$。因此变换为

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(y-1)+1 \\ (x-1)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+2 \\ x \end{pmatrix}.$$

例 6.2 (空间旋转). 求绕 z 轴旋转 $90°$ 的变换，再绕 x 轴旋转 $90°$ 的复合。

解：绕 z 轴旋转 $90°$ 的矩阵为

$$R_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

绕 x 轴旋转 $90°$ 的矩阵为

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

复合 $R = R_x R_z$ 为

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

这是行列式为 1 的正交矩阵，表示一个绕某个轴的空间旋转。

例 6.3 (平面反射). 求关于直线 $y = x$ 的反射变换。该反射将点 (x,y) 映为 (y,x)，其线性部分为矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，行列式为 -1。若直线不通过原点，需先平移至原点再反射，最后平移回去。

6.4 保距变换与仿射变换的关系

从变换群的角度看，有包含关系：

$$\mathrm{E}(n) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n \quad (\text{仿射群}).$$

保距变换是仿射变换中保持内积的子群。在埃尔朗根纲领的框架下，欧氏几何研究的就是在保距变换群下不变的性质，如距离、角度、面积等。

6.5 习题

1. 证明：平面上的保距变换如果保持三个不共线的点不动，则它必为恒等变换。
2. 求绕点 $(2, 3)$ 旋转 $180°$ 的变换公式。
3. 求关于直线 $x + y = 1$ 的反射变换表达式。
4. 证明：三维空间中的旋转可以表示为两个反射的复合。
5. 设 f 是平面保距变换，且 f 没有不动点。证明 f 是平移或滑移反射。

7 凸多面体

7.1 凸集与凸包

定义 7.1 (凸集)**.** 设 V 是实向量空间，$S \subseteq V$。如果对任意 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ 和任意 $t \in [0, 1]$，都有

$$(1 - t)\mathbf{u} + t\mathbf{v} \in S,$$

则称 S 为**凸集**。

注 7.1. 凸集的一个基本例子是仿射子空间，但更常见的是由半空间交集定义的区域。任何线性子空间和仿射子空间都是凸集。

定义 7.2 (凸组合)**.** 向量 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 的一个**凸组合**是指形如

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}_k$$

的线性组合，其中 $\lambda_i \geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$。

定义 7.3 (凸包)**.** 设 $S \subseteq V$，S 的**凸包**，记作 $\mathrm{conv}(S)$，是包含 S 的所有凸集的交集。等价地，$\mathrm{conv}(S)$ 是 S 中点的所有凸组合的集合。

例 7.1. 1. 在 $\mathbb{R}^2$ 中，三个不共线的点的凸包是一个三角形。

2. 在 $\mathbb{R}^3$ 中，四个不共面的点的凸包是一个四面体。

3. 一个有限点集的凸包是一个凸多面体（polytope）。

7.2 多面体与凸多面体

定义 7.4 (多面体). $\mathbb{R}^n$ 中的一个**多面体**（polyhedron）是指有限个半空间的交集：

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\},$$

其中 A 是 $m \times n$ 实矩阵，$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$。半空间是指形如 $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq b_i$ 的集合。

定义 7.5 (凸多面体). 一个有界的多面体称为**凸多面体**（convex polytope）。在有限维空间中，凸多面体等价于有限点集的凸包。

注 7.2. 凸多面体有两种基本表示方式，二者在理论上是等价的：

- **顶点表示（V-表示）**：$P = \mathrm{conv}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$，其中 $\mathbf{v}_i$ 是 P 的顶点。
- **半空间表示（H-表示）**：$P = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$，即 P 是一组线性不等式的解集。

这种对偶性是多面体理论的核心内容之一。

例 7.2 (单纯形). $\mathbb{R}^n$ 中 $n+1$ 个仿射无关的点（即这些点不共任何 $n-1$ 维超平面）的凸包称为一个**单纯形**。例如，三角形（$n=2$）和四面体（$n=3$）都是单纯形。单纯形是最简单的凸多面体。

例 7.3 (平行多面体). 由 n 个线性无关的向量 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 生成的平行多面体：

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{v}_i \;\middle|\; 0 \leq t_i \leq 1 \right\}.$$

这正是我们在外积部分讨论过的平行多面体，其体积为 $|\det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)|$。

7.3 凸多面体的几何元素

定义 7.6 (顶点). 设 P 是凸多面体，$\mathbf{v} \in P$。如果不存在相异的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P$ 和 $t \in (0,1)$ 使得 $\mathbf{v} = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$，则称 $\mathbf{v}$ 是 P 的一个**顶点**（或极点）。

定义 7.7 (边). 凸多面体 P 的一条**边**是连接两个顶点的线段，且该线段上的点都不能表示为 P 中其他点的凸组合（即线段是 P 的一维面）。

定义 7.8 (面). 凸多面体 P 的一个**面**是 P 与某个超平面的交集，且该超平面使得 P 全部位于其一侧。面的维数定义为该面所生成的仿射子空间的维数。特别地，

- 0 维面是顶点，
- 1 维面是边，
- $n-1$ 维面称为**超面**（在三维空间中通常直接称为面）。

例 7.4 (立方体的面)**.** 考虑立方体 $[0,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$。它的顶点集为

$$\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}.$$

它有 6 个正方形面（二维面）、12 条边（一维面）和 8 个顶点（零维面）。

例 7.5 (四面体)**.** 正四面体的顶点可取为 $(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1)$。它有 4 个三角形面、6 条边和 4 个顶点。

7.4 凸多面体的对偶性

凸多面体有一个重要的对偶概念：给定一个包含原点的凸多面体 P，其对偶多面体 P° 定义为：

$$P^\circ = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{y} \leq 1 \text{ 对所有} \mathbf{x} \in P\}.$$

对偶多面体的顶点对应原多面体的面，而原多面体的顶点对应其对偶多面体的面。这一对偶性在组合几何中非常重要。

例 7.6.

- **立方体的对偶**：立方体 $[-1,1]^3$ 的对偶是正八面体，顶点为 $(\pm1,0,0)$、$(0,\pm1,0)$、$(0,0,\pm1)$。立方体的每个正方形面对应对偶八面体的一个顶点，立方体的每个顶点对应对偶八面体的一个三角形面。
- **正四面体**：四面体 T 的对偶仍是四面体（可能经过缩放），因此四面体是自对偶的。
- **长方体的对偶**：长方体 $[0,a] \times [0,b] \times [0,c]$ 如果原点在一个角上，其对偶比较复杂；但如果原点在中心，其对偶是另一长方体？实际上，中心在原点的长方体 $[-a,a] \times [-b,b] \times [-c,c]$ 的对偶是 $[-1/a,1/a] \times [-1/b,1/b] \times [-1/c,1/c]$，仍是长方体（各轴方向独立缩放），所以也是长方体。

7.5 凸多面体体积的单纯形分解算法

在计算凸多面体的体积或进行有限元分析时，常常需要将凸多面体分解为若干个单纯形。单纯形是欧氏空间中最简单的凸多面体，具有 $n+1$ 个顶点。

定义 7.9 (单纯形)**.** 设 $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ 是 $n+1$ 个仿射无关的点（即向量 $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_n - \mathbf{a}_0$ 线性无关）。则它们的凸包

$$\Delta = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathbf{a}_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

称为 n 维**单纯形**。

定理 7.1. n 维单纯形的体积可由下列公式计算:

$$\mathrm{vol}(\Delta) = \frac{1}{n!}\left|\det(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0,\ \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_0,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n - \mathbf{a}_0)\right|.$$

特别地,在三维空间中,四面体(3-单纯形)的体积为

$$V = \frac{1}{6}\left|(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0)\cdot\big((\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_0)\times(\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_0)\big)\right|.$$

证明. 设 n 维单纯形 Δ 的顶点为 $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$,且向量 $\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_0$($i = 1, \ldots, n$)线性无关。考虑仿射变换

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad T(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i.$$

T 将标准单纯形

$$\Delta_0 = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1 \right\}$$

映为 Δ。T 的 Jacobi 矩阵为 $M = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ 给出,其行列式的绝对值 $|\det M|$ 为体积伸缩因子。因此

$$\mathrm{vol}(\Delta) = |\det M| \cdot \mathrm{vol}(\Delta_0).$$

现在计算 Δ_0 的体积。由累次积分,

$$\mathrm{vol}(\Delta_0) = \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \cdots \int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n \cdots dx_2 dx_1.$$

用归纳法易证该积分等于 $\frac{1}{n!}$。例如,当 $n = 1$ 时,$\Delta_0 = [0, 1]$ 体积为 1;假设 $n - 1$ 时成立,则对 n,

$$\int_0^1 \frac{(1 - x_1)^{n-1}}{(n-1)!}\, dx_1 = \frac{1}{n!}.$$

因此

$$\mathrm{vol}(\Delta) = \frac{1}{n!}\,|\det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)|.$$

□

为了计算任意凸多面体的体积,我们可以将其剖分成若干个单纯形(在三维中即为四面体)。下面给出一种适用于任意凸多面体的剖分算法。

算法步骤

1. **选取基点**:在多面体内部取一点 O。通常可选多面体的重心或所有顶点的算术平均,但需确保 O 在多面体内部(对于严格凸多面体,重心一定在内)。

2. **三角剖分每个面**：对于多面体的每一个面（它是一个凸多边形），将其三角剖分。常用的方法是以该面的一个顶点为起点，连接该顶点与其余不相邻的顶点，得到若干三角形。若面已经是三角形，则无需剖分。

3. **构造四面体**：对每个面剖分得到的每个三角形，以该三角形和基点 O 为顶点构成一个四面体。

4. **求和**：所有这些四面体的并集即为原多面体，且它们内部互不相交（仅公共面或棱相接）。将每个四面体的体积相加即得多面体的总体积。

该算法适用于任何凸多面体，因为基点 O 与每个面上的点的连线均位于多面体内（凸性保证）。剖分得到的四面体数目等于所有面剖分后三角形的总数。

例 7.7 (四棱锥的剖分)**.** 考虑底面为矩形 $ABCD$、顶点为 E 的四棱锥。取 $O = E$（顶点本身），底面矩形可沿对角线 AC 剖分成两个三角形 ABC 和 ACD。于是得到两个四面体 $EABC$ 和 $EACD$，它们的并即为整个四棱锥。利用四面体体积公式可分别计算并求和。

例 7.8 (平行六面体的剖分)**.** 平行六面体可由其一个顶点出发，连接与该顶点不相邻的三个顶点，得到三个四面体？实际上，平行六面体可剖分为五个或六个四面体，但用上述方法（取内部一点）更为系统。例如，取平行六面体的中心 O，每个面为平行四边形，先三角剖分每个面（每个平行四边形分为两个三角形），然后与 O 连接，共得到 $2 \times 6 = 12$ 个四面体。这些四面体完全填充平行六面体。

注 7.3. 上述剖分不是唯一的，但体积和与剖分方式无关。在计算体积时，只需逐个计算四面体体积并累加即可。

习题

1. 判断下列集合是否为凸集：

   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$；

   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$；

   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$。

2. 证明：任意两个凸集的交集仍是凸集。并举例说明两个凸集的并集不一定凸。

3. 设 P 是由点 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ 和 $(1, 1)$ 生成的凸包。求 P 的顶点、边和面（二维凸多边形的面即边）。

4. 写出下列多面体的半空间表示（H-表示）：

(a) 正方形 $[0,1]\times[0,1]\subset\mathbb{R}^2$；

(b) 四面体以 $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ 为顶点。

5. 计算由向量 $\mathbf{u}=(1,0,1)$, $\mathbf{v}=(0,1,1)$, $\mathbf{w}=(1,1,0)$ 张成的平行六面体的体积。

6. 证明：在 $\mathbb{R}^n$ 中，一个凸多面体的顶点集是唯一的（即不可能有两个不同的最小点集生成相同的凸包）。

7. 设 P 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸多面体，$\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$ 是一个非零向量。证明：线性函数 $f(\mathbf{x})=\mathbf{a}^\top\mathbf{x}$ 在 P 上的最大值必在 P 的某个顶点处达到。

8. 求四面体顶点为 $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ 的体积，并将该四面体剖分成若干个更小的四面体。

9. 证明：若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m$ 是凸多面体 P 的顶点，且 $\mathbf{x}\in P$，则 $\mathbf{x}$ 可以表示为这些顶点的凸组合。这是凸多面体的顶点表示定理。

10. 考虑多面体 $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$。

    (a) 画出 P，并找出它的顶点。

    (b) 求 P 的对偶多面体 $P^\circ=\{(u,v)\mid ux+vy\leq 1\text{ 对所有}(x,y)\in P\}$。

总结与展望

本章从线性空间公理出发，重新审视了向量代数的基本概念，建立起代数结构与几何直观之间的深刻联系：

- **向量**被定义为抽象线性空间中的元素，这一观点统一了 $\mathbb{R}^n$、函数空间、矩阵空间等具体对象，为后续的推广奠定了基础。

- **线性子空间**与 **仿射子空间**为共线、共面等经典几何概念提供了严格的代数刻画，并给出了“m 个点落在 r 维仿射子空间中”的充要条件——相关向量组的秩不超过 r。这一思想将几何位置关系转化为代数秩的判定。

- **范数**与 **内积**将长度、角度、正交性等度量概念公理化，并借助拉格朗日恒等式和 Gram 矩阵，将平行多面体的体积与向量组的内积联系起来。

- **外积（叉积）**在三维空间中自然给出了法向量、平行四边形面积，而 **外代数**将其推广至高维，Hodge 对偶则统一了法向量的构造——超平面的法向量正是其方向向量的 Hodge 对偶。这一框架为处理任意维度的子空间提供了坐标无关的代数语言。

- **凸多面体**作为有限点集的凸包或线性不等式组的解集，展现了向量空间在组合几何与优化中的直接应用。顶点、边、面的概念及其对偶性，将线性代数与离散几何紧密相连。

这种从具体到抽象、再从抽象回归几何的视角，不仅使 $\mathbb{R}^2$、$\mathbb{R}^3$ 中的传统向量运算得到统一解释，更为后续学习更高级的数学（如泛函分析中的无穷维空间、微分几何中的切空间与微分形式、拓扑学中的同调论等）铺设了坚实的阶梯。

在接下来的章节中，我们将把这些代数工具应用于具体的几何问题：从二次曲线曲面的分类，到坐标变换与不变量理论，再到仿射变换与射影几何初步。每一步都将延续本章的思想——用代数的精确语言描述几何的本质，用几何的直观图像引导代数的抽象思维。