射影空间

1 从仿射直线到射影直线

在仿射平面中，两条平行直线永不相交；在仿射直线上，函数可以无界地增长。这些现象提示我们，仿射空间缺少了某些“无穷远处”的点。为了统一处理平行与相交的情形，并使空间具备更好的紧致性，我们首先从一维情形——射影直线——入手。

具体地，对于实数轴 $\mathbb{R}$，我们引入一个理想点 ∞，称为无穷远点。于是得到扩充实数集 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$（实际上，这是把 $+\infty$ 和 $-\infty$ 看成一个点）。在几何上，这相当于把直线两端连接起来，形成一个封闭的圆。我们将在后面看到这一直观的严格实现。

1.1 射影直线的模空间定义

射影直线的严格定义不依赖于直观的“添加无穷远点”，而是从一维线性子空间的角度给出，这一观点适用于任意域。

定义 1.1. 设 $\mathbb{F}$ 是一个域。在二维向量空间 $\mathbb{F}^2$ 中，考虑所有一维线性子空间（即过原点的直线）。这些子空间的集合称为 $\mathbb{F}$ 上的**射影直线**，记作 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})$。等价地，

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{F}) = (\mathbb{F}^2 \setminus \{0\})/\sim,$$

其中 $(x_0, x_1) \sim (\lambda x_0, \lambda x_1)$ 对任意非零 $\lambda \in \mathbb{F}$。点用**齐次坐标** $[x_0 : x_1]$ 表示。

这一定义的优越性在于：它将“方向”而非具体数值作为基本对象。例如在实数域上，$\mathbb{R}^2$ 中每条过原点的直线对应一个方向，这些方向构成一个圆——这正是我们即将看到的几何模型。

齐次坐标 $[x_0 : x_1]$ 与通常的域中元素有一个自然的对应关系。当 $x_1 \neq 0$ 时，我们可以将点写成 $[x : 1]$，其中 $x = x_0/x_1 \in \mathbb{F}$。这给出了一个单射

$$\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{F}), \quad x \mapsto [x : 1].$$

它的像集是 $U_0 = \{[x_0 : x_1] \mid x_1 \neq 0\}$。余下的点集是 U_0 的补集，即 $\{[x_0 : 0] \mid x_0 \neq 0\}$，这只有一个点，记作 $\infty = [1 : 0]$。因此，作为集合，

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{F}) = \mathbb{F} \cup \{\infty\}.$$

类似地，若用另一个坐标卡 $x_0 \neq 0$，则点可写成 $[1 : y]$，其中 $y = x_1/x_0$，此时 $U_1 = \{[x_0 : x_1] \mid x_0 \neq 0\}$ 与 $\mathbb{F}$ 一一对应，且 $\infty = [0 : 1]$ 也被排除在 U_1 外。这表明“无穷远点”的概念依赖于坐标选取，而非本质的。

1.2 射影直线的局部仿射结构

对于任意域 $\mathbb{F}$，射影直线 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})$ 在局部上可以与仿射直线等同。具体地，我们有两个自然的子集（称为**仿射坐标卡**）：

$$U_0 = \{[x_0 : x_1] \mid x_1 \neq 0\}, \quad U_1 = \{[x_0 : x_1] \mid x_0 \neq 0\}.$$

- U_0 与域 $\mathbb{F}$ 之间存在一一对应 $\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{F}$，定义为 $\varphi_0([x_0 : x_1]) = x_0/x_1$，其逆映射为 $t \mapsto [t : 1]$。
- U_1 与 $\mathbb{F}$ 之间存在一一对应 $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{F}$，定义为 $\varphi_1([x_0 : x_1]) = x_1/x_0$，其逆映射为 $s \mapsto [1 : s]$。

通过这两个对应，我们可以将 $\mathbb{F}$ 上的仿射空间结构（即 $\mathbb{F}$ 作为一维向量空间上的仿射空间）搬到 U_0 和 U_1 上，使它们分别成为与仿射直线 $\mathbb{F}$ 同构的仿射空间。换句话说，U_0 和 U_1 都具有自然的仿射直线结构。

两个坐标卡覆盖整个射影直线，因为任何点至少有一个坐标非零。它们的交集 $U_0 \cap U_1$ 对应于 $\mathbb{F}^\times = \mathbb{F} \setminus \{0\}$，在此交集上，坐标变换为

$$s = \frac{1}{t},$$

其中 $t = x_0/x_1 \in \mathbb{F}^\times$，$s = x_1/x_0$。这是一个从 $\mathbb{F}^\times$ 到自身的双射。

1.3 射影直线作为仿射直线的“一点紧致化”

射影直线最重要的性质之一是：去掉任意一个点后，剩下的部分恰好同构于仿射直线。这正是“添加一个无穷远点”这一直观的精确表述。

定理 1.1. 设 $\mathbb{F}$ 是任意域，P 是 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})$ 中任意一点。则存在一个双射 $\Psi_P : \mathbb{P}^1(\mathbb{F}) \setminus \{P\} \to \mathbb{F}$。

证明. 我们分两种情形证明。

情形 1： $P = [1 : 0]$ 或者 $[0 : 1]$。此时由前面的讨论，$\mathbb{P}^1(\mathbb{F}) \setminus \{P\} = U_0$ 或 U_1，因此结论成立。

情形 2： $P = [a : b]$ 且 $b \neq 0$。考虑由矩阵

$$T = \begin{pmatrix} b & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

诱导的映射 $\tilde{T}:\mathbb{F}^2\to\mathbb{F}^2$，它是可逆线性变换（因为 $\det T=b\neq 0$）。此变换诱导射影直线上的一个**射影变换**（我们将在后续详细讨论），即

$$\Phi_T:\mathbb{P}^1(\mathbb{F})\to\mathbb{P}^1(\mathbb{F}),\quad [x_0:x_1]\mapsto[bx_0-ax_1:x_1].$$

容易验证 $\Phi_T(P)=[b\cdot a-a\cdot b:b]=[0:b]=[0:1]=\infty$（注意 $[0:b]$ 与 $[0:1]$ 相同）。由于 Φ_T 是双射（因为 T 可逆），它将 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})\setminus\{P\}$ 双射地映到 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})\setminus\{\infty\}=U_0$。然后复合 φ_0 即得

$$\Psi_P=\varphi_0\circ\Phi_T:\mathbb{P}^1(\mathbb{F})\setminus\{P\}\to\mathbb{F},$$

这是一个双射。 □

这个定理表明，射影直线上没有特殊的点，任何一点都可以被视为“无穷远点”。

1.4 实射影直线的几何模型：圆

现在考虑实数域上的射影直线 $\mathbb{RP}^1=\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$。我们来建立它与单位圆 $S^1=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\mid u^2+v^2=1\}$ 之间的联系。

命题 1.1. 存在一个从 $\mathbb{RP}^1$ 到单位圆 S^1 的一一对应，且这个对应及其逆映射都是连续的（在通常的欧氏拓扑意义下）。

证明. 取映射 $\Phi:\mathbb{RP}^1\to S^1$ 定义为：

$$\Phi([x_0:x_1])=\left(\frac{2x_0x_1}{x_0^2+x_1^2},\ \frac{x_0^2-x_1^2}{x_0^2+x_1^2}\right).$$

这是一个常见的有理参数化，它将射影直线上的点映到圆上。验证：当 $(x_0,x_1)\neq(0,0)$ 时，右端两坐标的平方和为 1，且依赖于比例类。不难验证 Φ 是双射：每个方向 $[x_0:x_1]$ 对应圆上唯一一点，且圆上每点可逆地找到对应的方向（可具体解出 $[x_0:x_1]$）。同时，Φ 是连续的，因为它是坐标的有理函数且分母非零。其逆映射也可用连续函数表达，因此也是连续的。 □

实际上，更直观的方式是用角度 θ：每个方向 $[x_0:x_1]$ 可视为与 x 轴正方向的夹角 θ，即 $x_0=\cos\theta$, $x_1=\sin\theta$（允许整体缩放）。由于 $[x_0:x_1]$ 与 $[-x_0:-x_1]$ 相同，θ 与 $\theta+\pi$ 对应同一点，因此 $\mathbb{RP}^1$ 可以看作将圆上的对径点等同，这仍然是一个圆（旋转半圈后重合）。无论如何，存在一个双连续的双射将 $\mathbb{RP}^1$ 与圆等同起来。

既然 $\mathbb{RP}^1$ 与圆 S^1 之间存在一一对应的连续映射且逆连续，那么在几何意义上，它们就是“相同的空间”。我们知道圆是 $\mathbb{R}^2$ 中的有界闭集，从而是**紧致**的（即它的任何开覆盖都有有限子覆盖）。因此，$\mathbb{RP}^1$ 也具有紧致性。这一紧致性使得 $\mathbb{RP}^1$ 上的连续函数必有界，这与仿射直线形成鲜明对比。

例 1.1 (例子：复射影直线)**.** 若取域 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$，则 $\mathbb{CP}^1$ 是复一维的，但作为实流形是二维的。类似地，$\mathbb{CP}^1=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$，它可以通过球极投影与二维球面 S^2 建立双连续的一一对应，即**黎曼球面**。这是复分析中最基本的一维紧复流形，其上的亚纯函数正是复平面上的有理函数。

2 射影空间的线性代数结构

在第一节中，我们以一维射影直线为例，引入了射影空间的基本思想。现在我们将这些概念推广到任意维数，建立射影空间的代数框架。

2.1 射影空间的定义与齐次坐标

仿照射影直线的定义，我们自然地将射影空间定义为更高维向量空间中一维子空间的集合。

定义 2.1. 设 $\mathbb{F}$ 是一个域，n 为非负整数。在 $(n+1)$ 维向量空间 $\mathbb{F}^{n+1}$ 中，考虑所有一维线性子空间（即过原点的直线）。这些子空间的集合称为 $\mathbb{F}$ 上的 n 维**射影空间**，记作 $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$。等价地，

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{F}) = (\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim,$$

其中 $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \sim (\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ 对任意非零 $\lambda \in \mathbb{F}$。点用**齐次坐标** $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$ 表示。

当 $n = 1$ 时，即前一节的射影直线；当 $n = 2$ 时，称为射影平面。

齐次坐标的重要性质是它们不是唯一的，但彼此成比例。因此，对于点 $P = [x_0 : \cdots : x_n]$，只要存在某个坐标非零，我们就可以通过除以该坐标将其归一化，从而得到仿射坐标。

2.2 局部仿射坐标卡

类似于一维情形，射影空间可以用多个仿射坐标卡覆盖，每个坐标卡都同构于仿射空间 $\mathbb{F}^n$。

对于每个 $i = 0, \ldots, n$，定义

$$U_i = \{[x_0 : \cdots : x_n] \mid x_i \neq 0\}.$$

则 U_i 与 $\mathbb{F}^n$ 之间存在一一对应：

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{F}^n, \quad [x_0 : \cdots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right),$$

其中 $\widehat{\frac{x_i}{x_i}}$ 表示省略这一项。其逆映射为

$$\psi_i(t_1, \ldots, t_n) = [t_1 : \cdots : t_{i-1} : 1 : t_i : \cdots : t_n],$$

即在第 i 个位置放 1，其余坐标由 t_j 给出。

这些 U_i 覆盖整个 $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$，称为**仿射坐标卡**。当点 P 同时属于两个不同的坐标卡 U_i 和 U_j 时，它在 U_i 中的坐标 $(t_1, \ldots, t_n)$ 与在 U_j 中的坐标 $(s_1, \ldots, s_n)$ 之间存在确定的

变换关系，称为**坐标变换**。这一变换可以通过将两个坐标都还原为同一组齐次坐标来得到。

设点 $P \in U_i \cap U_j$ 在 U_i 中的坐标为 $(t_1, \ldots, t_n)$，在 U_j 中的坐标为 $(s_1, \ldots, s_n)$。由定义，它们对应的齐次坐标分别为

$$P = [t_1 : \cdots : t_{i-1} : 1 : t_i : \cdots : t_n], \quad P = [s_1 : \cdots : s_{j-1} : 1 : s_j : \cdots : s_n].$$

因此存在非零标量 $\lambda \in \mathbb{F}^\times$ 使得

$$(t_1, \ldots, t_{i-1}, 1, t_i, \ldots, t_n) = \lambda\,(s_1, \ldots, s_{j-1}, 1, s_j, \ldots, s_n). \tag{1}$$

为用 $(t_1, \ldots, t_n)$ 表示 $(s_1, \ldots, s_n)$，记左边向量的第 m 个分量为 L_m $(1 \leq m \leq n+1)$，即

$$L_m = \begin{cases} t_m, & 1 \leq m < i, \\ 1, & m = i, \\ t_{m-1}, & i < m \leq n+1. \end{cases}$$

比较 (1) 式两边的第 j 个分量得 $\lambda = L_j$（因为右边第 j 个分量为 $\lambda \cdot 1$）。由于 $P \in U_j$，有 $x_j \neq 0$，从而 $L_j \neq 0$，分母合理。于是由 (1) 式得

$$\lambda s_k = L_k \quad (1 \leq k < j), \qquad \lambda s_{k-1} = L_k \quad (j < k \leq n+1).$$

将 $\lambda = L_j$ 代入，解得

$$s_k = \frac{L_k}{L_j}, \quad 1 \leq k < j,$$

$$s_k = \frac{L_{k+1}}{L_j}, \quad j \leq k \leq n.$$

此即从 U_i 到 U_j 的坐标变换公式。

2.3 射影子空间：点、直线、平面、超平面

在射影空间中，我们可以自然地定义“直线”、“平面”等概念，它们对应于原向量空间中的线性子空间。

定义 2.2. 设 $W \subseteq \mathbb{F}^{n+1}$ 是一个 $r+1$ 维线性子空间（$0 \leq r \leq n$）。则 W 中所有一维子空间的集合

$$\mathbb{P}(W) = \{[x_0 : \cdots : x_n] \mid (x_0, \ldots, x_n) \in W \setminus \{0\}\} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{F})$$

称为 $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 中的一个 r 维**射影子空间**。根据维数 r 的不同，我们有不同的称谓：

- 当 $r = 0$ 时，它是一个**点**（零维射影子空间）。

- 当 $r=1$ 时，它是一条**射影直线**。
- 当 $r=2$ 时，它是一个**射影平面**。
- 当 $r=n-1$ 时，它称为一个**超平面**。

定理 2.1 (射影子空间的维数公式)**.** 设 $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 是 n 维射影空间，U 和 V 是其中的射影子空间，维数分别为 m 和 l（$0 \le m, l \le n$）。当 $m+l-n \ge 0$ 时，则它们的交集 $U \cap V$ 是一个非空射影子空间，且其维数满足

$$\dim(U \cap V) \ge m+l-n.$$

证明. 设 $U=\mathbb{P}(W_U)$，$V=\mathbb{P}(W_V)$，其中 $W_U, W_V \subseteq \mathbb{F}^{n+1}$ 分别是维数为 $m+1$ 和 $l+1$ 的线性子空间。则 $U \cap V = \mathbb{P}(W_U \cap W_V)$。由线性子空间的维数公式：

$$\dim(W_U)+\dim(W_V)=\dim(W_U+W_V)+\dim(W_U \cap W_V).$$

注意到 $W_U+W_V \subseteq \mathbb{F}^{n+1}$，故 $\dim(W_U+W_V) \le n+1$。于是

$$\dim(W_U \cap W_V)=\dim(W_U)+\dim(W_V)-\dim(W_U+W_V) \ge (m+1)+(l+1)-(n+1)=m+l+1-n.$$

因此

$$\dim(U \cap V)=\dim(W_U \cap W_V)-1 \ge m+l-n.$$

若 $m+l-n \ge 0$，则右端非负，从而 $U \cap V$ 至少含有 0 维子空间，即非空。 □

推论 2.1.1 (射影平面上的两条直线)**.** 在射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{F})$ 中，任意两条不同的直线总相交于一点。

证明. 在 $\mathbb{P}^2$ 中，直线是一维射影子空间，即 $m=l=1$。由定理，它们的交的维数满足

$$\dim(U \cap V) \ge 1+1-2=0,$$

故 $U \cap V$ 至少是一个点。若两条直线不同，则它们对应的二维线性子空间 W_U 和 W_V 不相等，$\dim(W_U \cap W_V) \le 1$，从而 $\dim(U \cap V)=0$，即恰好是一个点。因此任意两条不同直线有唯一交点。 □

设 $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 是射影空间中的点，齐次坐标分别为

$$P_i=[x_0^{(i)} : x_1^{(i)} : \cdots : x_n^{(i)}], \quad i=1,\ldots,r.$$

构造矩阵

$$M=\begin{pmatrix} x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & \cdots & x_n^{(1)} \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{(r)} & x_1^{(r)} & \cdots & x_n^{(r)} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{r \times (n+1)}.$$

则由定义得到，点 $P_1,\dots,P_r$ 落在某个 m 维射影子空间中的充要条件是

$$\operatorname{rank} M \le m+1.$$

由定义立即得到：任意两个不同的点决定唯一一条射影直线。

定理 2.2. 设 $S\subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 是一个 m 维射影子空间（即 $S=\mathbb{P}(W)$，其中 $W\subseteq \mathbb{F}^{n+1}$ 是 $m+1$ 维线性子空间）。若 $S\cap U_i\neq\varnothing$，则 $\varphi_i(S\cap U_i)$ 是 $\mathbb{F}^n$ 中的一个 m 维仿射子空间。

证明. 设 W 是 $\mathbb{F}^{n+1}$ 中 $m+1$ 维子空间，$S=\mathbb{P}(W)$。由于 $S\cap U_i\neq\varnothing$，存在点 $[x]\in S$ 使得 $x_i\neq 0$。那么所有满足 $x_i\neq 0$ 的 $[x]\in S$ 构成 S 中一个子集，其像在 φ_i 下为

$$\varphi_i(S\cap U_i)=\left\{\left(\frac{x_0}{x_i},\dots,\widehat{\frac{x_i}{x_i}},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right)\middle|\,[x_0:\dots:x_n]\in S,\ x_i\neq 0\right\}.$$

令 $W_1=\{\mathbf{x}\in W\mid x_i=1\}$。这是一个仿射子空间（如果非空），其维数为 m（因为 W 是 $m+1$ 维，超平面 $x_i=1$ 是 n 维仿射子空间，且不平行于 W 时交为 m 维）。由于 $S\cap U_i$ 中的点一一对应到 W_1（因为每个点有唯一的代表元使 $x_i=1$）。因此 $\varphi_i(S\cap U_i)$ 是 W_1 在线性映射下 $(x_0,\dots,x_i,\dots,x_n)\mapsto(x_0,\dots,\widehat{x}_i,\dots,x_n)$ 的像，而 W_1 是仿射子空间，其像也是仿射子空间（线性映射保持仿射结构），且维数不超过 m。由于映射是单射（因为 W_1 中的点由其余坐标唯一确定），像的维数等于 m。故 $\varphi_i(S\cap U_i)$ 是 $\mathbb{F}^n$ 中一个 m 维仿射子空间。 □

命题 2.1. (仿射子空间的射影闭包) 设 $A=\mathbf{p}+V$ 是 $\mathbb{F}^n$ 中的一个 m 维仿射子空间，其中 $V\subseteq\mathbb{F}^n$ 是 m 维线性子空间，$\mathbf{p}\in\mathbb{F}^n$。考虑 $\mathbb{F}^{n+1}$ 中的子集

$$W=\{(\mathbf{p}t+\mathbf{v},\ t)\mid t\in\mathbb{F},\ \mathbf{v}\in V\}.$$

则 W 是 $\mathbb{F}^{n+1}$ 的一个 $m+1$ 维线性子空间。并且，通过嵌入 $\iota:\mathbb{F}^n\hookrightarrow\mathbb{P}^n(\mathbb{F}),(x_1,\dots,x_n)\mapsto[x_1:\dots:x_n:1]$，有 $\iota(A)=\mathbb{P}(W)\cap U_{n+1}$，其中 $U_{n+1}=\{[x_1:\dots:x_n:x_{n+1}]\mid x_{n+1}\neq 0\}$。$\mathbb{P}(W)$ 称为 A 在射影空间中的**闭包**。

证明. 首先验证 W 是线性子空间。任取 $(\mathbf{p}t_1+\mathbf{v}_1,t_1)$ 和 $(\mathbf{p}t_2+\mathbf{v}_2,t_2)\in W$，则它们的和为

$$(\mathbf{p}(t_1+t_2)+(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2),\ t_1+t_2)\in W,$$

因为 $t_1+t_2\in\mathbb{F}$，$\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\in V$。对于数乘，取 $\lambda\in\mathbb{F}$，则

$$\lambda(\mathbf{p}t+\mathbf{v},t)=(\mathbf{p}(\lambda t)+\lambda\mathbf{v},\ \lambda t)\in W.$$

显然零向量对应 $t=0,\mathbf{v}=0$。因此 W 是线性子空间。

取 V 的一组基 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m$，则向量 $(\mathbf{p},1)$ 和 $(\mathbf{v}_1,0),\dots,(\mathbf{v}_m,0)$ 是 W 的一组基，故 $\dim W=m+1$。

最后，对于任意 $\mathbf{x}\in A$，有 $\mathbf{x}=\mathbf{p}+\mathbf{v}$，则 $(\mathbf{x},1)\in W$，从而 $\iota(\mathbf{x})=[\mathbf{x}:1]\in\mathbb{P}(W)\cap U_{n+1}$。反之，若 $[x_1:\dots:x_n:x_{n+1}]\in\mathbb{P}(W)\cap U_{n+1}$，则存在 $t,\mathbf{v}$ 使得 $(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})=(\mathbf{p}t+\mathbf{v},t)$，且 $x_{n+1}\neq 0$，从而 $t\neq 0$。于是可归一化得 $[x_1:\dots:x_n:1]=[\mathbf{p}+\mathbf{v}/t:1]\in\iota(A)$。因此 $\iota(A)=\mathbb{P}(W)\cap U_{n+1}$。 □

推论 2.2.1. 设 $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{F}^n$ 是 r 个点，记它们的坐标为 $P_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$。构造矩阵

$$M = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \cdots & x_{rn} & 1 \end{pmatrix}.$$

则这 r 个点落在某个 m 维仿射子空间中的充要条件是 $\operatorname{rank} M \le m+1$。

证明. 将仿射空间 $\mathbb{F}^n$ 通过映射

$$\iota : \mathbb{F}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{F}), \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \cdots : x_n : 1]$$

嵌入到射影空间的仿射坐标卡 $U_{n+1} = \{[x_1 : \cdots : x_n : x_{n+1}] \mid x_{n+1} \neq 0\}$ 中。记 $\iota(P_i) = [x_{i1} : \cdots : x_{in} : 1]$，其对应的齐次坐标向量为 $\mathbf{v}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in}, 1) \in \mathbb{F}^{n+1}$。设 $V = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$，则 $\dim V = \operatorname{rank} M$。

必要性: 设 $P_1, \dots, P_r$ 落在某个 m 维仿射子空间 $A \subseteq \mathbb{F}^n$ 中。由命题 2.1, 存在一个 $m+1$ 维线性子空间 $W \subseteq \mathbb{F}^{n+1}$，使得 $\iota(A) = \mathbb{P}(W) \cap U_{n+1}$，且 $\mathbf{v}_i \in W$。于是 $V \subseteq W$，故 $\dim V \le \dim W = m+1$，即 $\operatorname{rank} M \le m+1$。

充分性：假设 $\operatorname{rank} M = \dim V \le m+1$。由于每个 $\mathbf{v}_i$ 的最后一个分量为 1，因此射影子空间 $S = \mathbb{P}(V)$ 与 U_{n+1} 的交非空。由定理（射影子空间与仿射坐标卡的交是仿射子空间），$S \cap U_{n+1}$ 是一个仿射子空间，其维数为 $\dim V - 1 \le m$。 □

2.4 超平面与齐次线性方程

超平面是余维数为 1 的射影子空间，在几何和代数中都非常重要。

命题 2.2. 任意一个超平面 $H \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 可以由一个非零齐次线性方程

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0, \quad (a_0, \dots, a_n) \neq 0$$

的零点集给出。反之，任何这样的方程定义了一个超平面。

超平面的方程中的系数 $(a_0, \dots, a_n)$ 本身也可以视为齐次坐标，它们定义了对偶射影空间 $(\mathbb{P}^n(\mathbb{F}))^*$ 中的一个点。这正是射影几何中对偶原理的体现。

更一般地，任意 k 维射影子空间可以由 $n-k$ 个线性无关的齐次线性方程联立定义：

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{n-k,0}x_0 + a_{n-k,1}x_1 + \cdots + a_{n-k,n}x_n = 0, \end{cases}$$

其中系数矩阵的秩为 $n-k$。这组方程的解空间（作为 $\mathbb{F}^{n+1}$ 的子空间）的维数为 $k+1$，对应射影子空间的维数为 k。

设 $A \subseteq \mathbb{F}^n$ 是一个 d 维仿射子空间。则 A 可由一组仿射线性方程描述：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases}$$

其中 $k = n - d$，且系数矩阵 (a_{ij}) 的秩为 k。这些方程是非齐次的。

为了得到 A 在射影空间 $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 中的闭包，我们引入齐次坐标 $[x_1 : \cdots : x_n : x_{n+1}]$，并将仿射点 $(x_1, \ldots, x_n)$ 对应为 $[x_1 : \cdots : x_n : 1]$。将上述仿射方程齐次化：每个方程中的常数项乘以 x_{n+1}，得到齐次线性方程

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i x_{n+1}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

即

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n - b_i x_{n+1} = 0.$$

这 k 个齐次线性方程定义了 $\mathbb{F}^{n+1}$ 中的一个线性子空间 W，其维数为

$$\dim W = (n+1) - k = d + 1.$$

于是 $\mathbb{P}(W)$ 即为 A 的射影闭包。在仿射卡 $x_{n+1} = 1$ 中，$\mathbb{P}(W) \cap \{x_{n+1} \neq 0\}$ 恰好就是 A。

A 的方向子空间 V（即与 A 平行的线性子空间）由齐次方程中常数项为零的部分给出：

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0, \quad i = 1, \ldots, k.$$

这对应于 $\mathbb{P}(W)$ 与无穷远超平面 $x_{n+1} = 0$ 的交集，即 A 的无穷远点集。

因此，齐次化的过程将仿射子空间提升为射影子空间，并将方向子空间自然地嵌入无穷远部分。

2.5 计算例子

我们通过几个例子演示上述矩阵判别法的应用，并验证其与直接几何构造的一致性。

例 2.1 (过两点的射影直线). 在 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ 中，给定两点 $P = [1 : 2 : 3]$ 和 $Q = [2 : 3 : 5]$，求过它们的直线方程。

解法一（矩阵判别法）：构造矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

两列线性无关（因为不成比例），故 $\operatorname{rank} M = 2$，所以它们确定一条直线（$m = 1$ 满足 $\operatorname{rank} M \leq 2$）。为求直线方程，设方程为 $aX + bY + cZ = 0$，代入 P, Q 得

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 0, \\ 2a + 3b + 5c = 0. \end{cases}$$

解此齐次方程组，系数矩阵的秩为 2，解空间维数为 1。解得 $(a, b, c) = (1, 1, -1)$（可取），故直线方程为 $X + Y - Z = 0$。

解法二（仿射坐标法）： 取仿射坐标卡 $U_0 = \{X \neq 0\}$，则 P 的仿射坐标为 $(2, 3)$，Q 归一化为 $[1 : 1.5 : 2.5]$，仿射坐标为 $(1.5, 2.5)$。过这两点的仿射直线方程为 $y = x + 1$，齐次化得 $X + Y - Z = 0$。两种方法结果一致。

例 2.2 (三个点共面的判定)**.** 在 $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ 中，给定三点 $P = [1 : 1 : 0 : 0]$，$Q = [1 : 0 : 1 : 0]$，$R = [1 : 0 : 0 : 1]$，求过它们的平面方程。

构造矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

三列线性无关（因为后三行构成单位矩阵的前三列），$\operatorname{rank} M = 3$，故它们确定一个平面（$m = 2$ 满足 $\operatorname{rank} M \leq 3$）。设平面方程为 $aX + bY + cZ + dW = 0$，代入得

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ a + c = 0, \\ a + d = 0. \end{cases}$$

解得 $b = c = d = -a$，取 $a = 1$ 得平面方程 $X - Y - Z - W = 0$。

例 2.3 (三点共线的判别)**.** 在 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ 中，判断 $P = [1 : 2 : 3]$，$Q = [2 : 4 : 6]$，$R = [1 : 0 : 1]$ 是否共线。

构造矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

计算行列式：$1 \cdot (4 \cdot 1 - 0 \cdot 6) - 2 \cdot (2 \cdot 1 - 0 \cdot 3) + 1 \cdot (2 \cdot 6 - 4 \cdot 3) = 4 - 4 + (12 - 12) = 0$，故 $\operatorname{rank} M \leq 2$。实际上第一、二列成比例，秩为 2，所以三点共线（落在直线 $X + Y - Z = 0$ 上，可验证 R 满足此方程）。注意 Q 与 P 代表同一点，因为 $[2 : 4 : 6] = [1 : 2 : 3]$，所以实际上是两个不同的点，必然共线。

这一统一性表明，我们既可以在射影空间整体上通过线性代数处理问题，也可以借助仿射坐标卡转化为仿射几何问题，两种方法相辅相成。这正是射影几何的强大之处。

3 射影变换

3.1 射影变换

射影变换是射影几何的核心概念，它由向量空间上的可逆线性映射诱导。

定义 3.1. 设 $T \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{F})$ 是 $\mathbb{F}^{n+1}$ 上的可逆线性变换。则 T 诱导一个映射

$$\Phi_T : \mathbb{P}^n(\mathbb{F}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{F}), \quad [x_0 : \cdots : x_n] \mapsto [T(x_0, \ldots, x_n)].$$

由于 T 可逆且将非零向量映为非零向量，且与标量乘法交换（$T(\lambda\mathbf{x}) = \lambda T(\mathbf{x})$），此映射是良定义的。称 Φ_T 为 $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 上的一个**射影变换**。

命题 3.1. 射影变换具有以下基本性质：

1. Φ_T 是双射，且其逆为 $\Phi_{T^{-1}}$。
2. 射影变换将射影子空间映为射影子空间，且保持维数。
3. 所有射影变换构成一个群，记作 $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{F})$，称为**射影线性群**。它同构于 $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{F})$ 模去标量矩阵 $\mathbb{F}^\times I$。

射影变换的重要性在于它保持射影几何的基本结构，并且可以将任意点、超平面等变换到标准位置。这一性质将在后面反复使用。

利用射影变换，我们可以证明射影空间去掉任何一个超平面后都同构于仿射空间。这正是"射影空间是仿射空间的完备化"这一思想的精确表述。

定理 3.1. 设 $H \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 是任意一个超平面。则 $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}) \setminus H$ 存在到 $\mathbb{F}^n$ 的一一对应。

证明. 设 H 的方程为 $a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0$。考虑可逆线性变换 $T \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{F})$，它将向量 $(a_0, \ldots, a_n)$ 映为 $(1, 0, \ldots, 0)$。例如，取 T 的第一行为 $(a_0, \ldots, a_n)$，再补全为可逆矩阵（由于 $(a_0, \ldots, a_n) \neq 0$，总能做到）。则 T 诱导的射影变换 Φ_T 将 H 映为超平面 $H_0 = \{x_0 = 0\}$，因为 $\Phi_T([x])$ 满足 $x_0 = 0$ 当且仅当 T^{-1} 的作用使原像落在 H 中。 □

这个定理表明，射影空间是仿射空间的"一点紧致化"的推广：添加一个超平面（称为无穷远超平面）后，仿射空间变成射影空间。反之，去掉射影空间中的任何一个超平面，剩余部分就是仿射空间。这体现了射影空间的齐性——没有任何一个超平面是特殊的，射影变换可以将其任意移动。

3.2 射影变换的基本性质

我们可以通过一个适当的射影变换将图形置于特殊位置，从而大大简化计算，而不失一般性。

定义 3.2 (一般位置)**.** 在 n 维射影空间 $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 中，$n+1$ 个点 $P_0, P_1, \ldots, P_n$ 称为处于**一般位置**，如果它们在 $\mathbb{F}^{n+1}$ 中的任意一组齐次坐标代表元 $p_0, p_1, \ldots, p_n$ 是线性无关的。等价地，这些点不全部落在同一个超平面上。

定理 3.2. 设 $P_0, \ldots, P_n$ 和 $Q_0, \ldots, Q_n$ 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 中两组处于一般位置的点。则存在一个射影变换 $\Phi \in \mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{F})$，使得 $\Phi(P_i) = Q_i$ 对所有 $i = 0, \ldots, n$ 成立。

证明. 选取 P_i 的齐次坐标代表元 $p_i \in \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\}$，由于它们处于一般位置，$p_0, \ldots, p_n$ 线性无关，构成 $\mathbb{F}^{n+1}$ 的一组基。同样，选取 Q_i 的代表元 q_i，它们也构成一组基。

定义线性映射 $T : \mathbb{F}^{n+1} \to \mathbb{F}^{n+1}$ 由它在基上的作用唯一确定：

$$T(p_i) = q_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

由于 p_i 是基，T 是良定义的线性映射，且将基映为基，因此 T 可逆。令 Φ 为由 T 诱导的射影变换，即 $\Phi([x]) = [T(x)]$。则对每个 i，有 $\Phi(P_i) = [T(p_i)] = [q_i] = Q_i$，满足要求。

注意，若选取不同的代表元，比如 $p_i' = \lambda_i p_i$，则它们仍是基，但此时按基定义的 T' 满足 $T'(p_i') = q_i$，则 $T'(p_i) = T'(\lambda_i^{-1} p_i') = \lambda_i^{-1} q_i$，这导致 T' 与 T 相差一个对角矩阵，但诱导的射影变换相同，因为 $[T'(p_i)] = [q_i]$。因此变换与代表元的选取无关。 □

推论 3.2.1. 在射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{F})$ 中，任意两条不同的直线总可以经过一个射影变换变为坐标轴 $x_1 = 0$ 和 $x_2 = 0$。

证明. 设 l_1 和 l_2 是两条不同的直线，它们交于一点 P。在 l_1 上任取异于 P 的一点 Q，在 l_2 上任取异于 P 的一点 R，再取一点 S 不在 $l_1 \cup l_2$ 上，且使得 P, Q, R, S 中任意三点不共线（这样的 S 总是存在的）。由定理（射影变换可任意指定四个一般位置的点），存在唯一的射影变换 Φ 满足

$$\Phi(P) = [1:0:0], \quad \Phi(Q) = [0:1:0], \quad \Phi(R) = [0:0:1], \quad \Phi(S) = [1:1:1].$$

由于 l_1 是过 P 和 Q 的直线，它的像 $\Phi(l_1)$ 是过 $[1:0:0]$ 和 $[0:1:0]$ 的直线，即 $x_2 = 0$。同理，l_2 过 P 和 R，其像为过 $[1:0:0]$ 和 $[0:0:1]$ 的直线，即 $x_1 = 0$。因此 Φ 将 l_1 和 l_2 映为坐标轴。 □

3.3 交比

设 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})$ 是一条射影直线。取其上四个点 A, B, C, D，且 A, B, C, D 互异。任取它们的齐次坐标：

$$A = [a_0 : a_1], \quad B = [b_0 : b_1], \quad C = [c_0 : c_1], \quad D = [d_0 : d_1].$$

定义 3.3. 四点 A, B, C, D 的**交比**（cross ratio）定义为

$$(A, B; C, D) = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}.$$

其中 $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$ 表示以两列向量构成的行列式。

这个定义与齐次坐标代表元的选取无关：若将某点的坐标乘以非零因子，分子分母中该点的行列式会同时乘以该因子，因此比值不变。特别地，交比取值于 $\mathbb{F} \cup \{\infty\}$（当分母为零时，规定交比为 ∞）。

交比是射影直线上四点的最基本的射影不变量。它推广了仿射几何中的单比：当其中一点为无穷远点时，交比退化为单比。

例 3.1 (与单比的关系)**.** 在仿射直线 $\mathbb{F}$ 中，取四点 a, b, c, d，则它们在射影直线中的齐次坐标为 $[a:1]$ 等。计算交比：

$$([a:1], [b:1]; [c:1], [d:1]) = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}.$$

若令 $d = \infty$（即 $[1:0]$），则上式变为 $\dfrac{a-c}{b-c}$，这正是有向单比 $(A, B; C)$。

交比具有以下对称性质：

$$\begin{aligned} (A, B; C, D) &= (B, A; D, C), \\ (A, B; C, D) &= (C, D; A, B), \\ (A, B; C, D) &= \frac{1}{(A, B; D, C)}. \end{aligned}$$

这些性质可由行列式的性质直接推出。

射影变换由可逆线性映射诱导，保持交比不变。

定理 3.3. 设 $\Phi : \mathbb{P}^1(\mathbb{F}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{F})$ 是一个射影变换，A, B, C, D 是四个点（允许某个为无穷远点）。则

$$(\Phi(A), \Phi(B); \Phi(C), \Phi(D)) = (A, B; C, D).$$

证明. 设 Φ 由可逆线性变换 $T \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F})$ 诱导，即 $\Phi([\mathbf{x}]) = [T\mathbf{x}]$。取 A, B, C, D 的齐次坐标向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$。则 $\Phi(A)$ 的齐次坐标可写为 $T\mathbf{a}$ 等。代入交比定义：

$$(\Phi(A), \Phi(B); \Phi(C), \Phi(D)) = \frac{\det(T\mathbf{a}, T\mathbf{c}) \cdot \det(T\mathbf{b}, T\mathbf{d})}{\det(T\mathbf{a}, T\mathbf{d}) \cdot \det(T\mathbf{b}, T\mathbf{c})}.$$

由于 $\det(T\mathbf{u}, T\mathbf{v}) = \det T \cdot \det(\mathbf{u}, \mathbf{v})$，上式分子分母中的 $\det T$ 因子全部抵消，因此等于原交比。 □

这一不变性是射影几何中最重要的定理之一，它表明交比完全刻画了射影直线的结构。

在实际计算中，常用以下简化公式。取定射影直线上的一个仿射坐标卡，将点表示为参数形式。例如，在仿射坐标 x 下，点 A,B,C,D 对应参数 a,b,c,d（允许无穷大），则交比为

$$(A,B;C,D)=\frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}.$$

若某点为无穷远点，则相应的差视为 1（例如 $d=\infty$ 时，$(b-d)/(a-d)$ 理解为 1）。这一公式可直接从齐次坐标定义推导。

例 3.2. 在 $\mathbb{RP}^1$ 中，取四点 $A=[1:2],B=[2:3],C=[3:4],D=[4:5]$。用仿射坐标 $x=y_1/y_0$ 得 $a=2,b=1.5,c=4/3,d=1.25$，计算交比：

$$\frac{(2-4/3)(1.5-1.25)}{(2-1.25)(1.5-4/3)}=\frac{(2/3)(0.25)}{(0.75)(1/6)}=\frac{1/6}{1/8}=\frac{4}{3}.$$

直接使用齐次坐标行列式也可得到相同结果。

当交比等于 -1 时，四点称为**调和点列**，记作 $H(A,B;C,D)$。调和点列在射影几何中具有特殊地位，例如完全四边形的对角线点构成调和点列，射影几何中许多经典定理（如极线理论）都涉及调和点列。

例 3.3. 在仿射直线上，取 $a=0,b=1,c=\frac{1}{2}$，则 d 满足 $(A,B;C,D)=-1$ 时解得 $d=2$。即 $(0,1;\frac{1}{2},2)$ 构成调和点列。

4 射影平面几何的两个经典定理

在本节中，我们用射影坐标的方法证明德萨格定理和帕普斯定理。

4.1 德萨格定理

定理 4.1 (德萨格定理)**.** 设 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 是射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{F})$ 中的两个三角形（顶点不共线）。若三对对应顶点的连线 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 共点于 O，则三对对应边的交点

$$P=B_1C_1\cap B_2C_2,\quad Q=C_1A_1\cap C_2A_2,\quad R=A_1B_1\cap A_2B_2$$

共线。

证明. 由于 A_1,B_1,C_1 不共线，我们可以通过射影变换使它们的坐标分别为

$$A_1=[1:0:0],\quad B_1=[0:1:0],\quad C_1=[0:0:1].$$

设点 O 的齐次坐标为 $[u:v:w]$。

由于 A_2 在直线 OA_1 上，可表示为 $A_2 = \alpha A_1 + \beta O$ 且 $\beta \neq 0$。如果 $A_2 \neq A_1$, 则 $\beta \neq 0$，归一化 $\beta = 1$，则存在 $a \in \mathbb{F}$ 使得

$$A_2 = [a + u : v : w].$$

如果 $A_2 = A_1$，则 $O = A_2 = A_1 = [1 : 0 : 0]$，在上式中取任意 a 即可。

类似地，B_2 在 OB_1 上，存在 $b \in \mathbb{F}$ 使得

$$B_2 = [u : b + v : w].$$

C_2 在 OC_1 上，取参数 $c \in \mathbb{F}$ 使得

$$C_2 = [u : v : c + w].$$

现在计算交点 $P = B_1C_1 \cap B_2C_2$。直线 B_1C_1 的方程为 $x_0 = 0$，故 P 可设为 $[0 : p : q]$。直线 B_2C_2 上的点可参数化为 $sB_2 + tC_2$，由坐标可知 $s = -t$. 代入得

$$P = [0 : -tb : tc] = [0 : b : -c].$$

即 $P = [0 : b : -c]$。

类似地，$Q = [a : 0 : -c]$，$R = [a : -b : 0]$。

验证三点共线，计算行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & b & -c \\ a & 0 & -c \\ a & -b & 0 \end{vmatrix}.$$

按第一行展开：

$$\Delta = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -c \\ -b & 0 \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} a & -c \\ a & 0 \end{vmatrix} + (-c) \cdot \begin{vmatrix} a & 0 \\ a & -b \end{vmatrix}.$$

计算：

$$-b \cdot (a \cdot 0 - (-c)a) = -b \cdot (ac) = -abc,$$

$$-c \cdot (a(-b) - 0 \cdot a) = -c \cdot (-ab) = abc.$$

故 $\Delta = -abc + abc = 0$，因此 P, Q, R 共线。

□

4.2 帕普斯定理

定理 4.2 (帕普斯定理)**.** 设 l_1 和 l_2 是射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{F})$ 中的两条直线，$A, B, C \in l_1$ 为三个不同点，$A', B', C' \in l_2$ 为三个不同点。则交点

$$P = AB' \cap A'B, \quad Q = AC' \cap A'C, \quad R = BC' \cap B'C$$

共线。

证明. 假设 A 是 l_1, l_2 的交点，那么 $P = Q = A'$, 结论平凡成立。因此我们不妨假设六个点都不是 l_1, l_2 的交点。

通过一个射影变换，我们可以将直线 l_1 和 l_2 分别变为坐标轴 $x_2 = 0$ 和 $x_1 = 0$。这是因为任意两条不同的直线总可射影地映为任意两条直线。

注意到这时候交点为 [1:0:0]，由于六个点互异且不在交点上，它们的坐标可写为

$$A = [a:1:0], \quad B = [b:1:0], \quad C = [c:1:0], \quad A' = [a':0:1], \quad B' = [b':0:1], \quad C' = [c':0:1],$$

其中 $a, b, c \in \mathbb{F}$ 互不相等，$a', b', c' \in \mathbb{F}$ 互不相等。

计算直线 AB' 与 $A'B$ 的交点 P。AB' 过 $[a:1:0]$ 和 $[b':0:1]$，其方程可由行列式得到为 $x_0 - ax_1 - b'x_2 = 0$（求在三维空间中的法向量即可）。$A'B$ 过 $[a':0:1]$ 和 $[b:1:0]$，方程为 $-x_0 + bx_1 + a'x_2 = 0$。联立解得

$$P = [bb' - aa' : b' - a' : b - a].$$

同理可得

$$Q = [cc' - aa' : a' - c' : c - a], \quad R = [cc' - bb' : b' - c' : c - b].$$

现在验证 P, Q, R 共线。考虑行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} bb' - aa' & b' - a' & b - a \\ cc' - aa' & a' - c' & c - a \\ cc' - bb' & b' - c' & c - b \end{vmatrix}.$$

三行相加得到 0, 因此矩阵的行向量线性相关，故 $\Delta = 0$，P, Q, R 共线。 $\square$