平面曲线及其应用

1　平面曲线的仿射理论

平面曲线是解析几何中最基本的研究对象之一。本节将从仿射几何的角度研究平面曲线，重点关注曲线的表示、切线与法线的计算以及奇点的判别。

1.1　实平面上的连续曲线

实平面 $\mathbb{R}^2$ 上曲线通常有两种表示方式：参数方程和隐式方程。

定义 1.1 (隐式曲线). 设 $f(x,y)$ 是一个非 0 连续函数, 集合 $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=0\}$ 称为一条**隐式曲线**。

定义 1.2 (梯度). 设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 附近是是可微函数，则在这一点**梯度**定义为

$$\nabla f(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right).$$

梯度方向是函数 f 在该点增长最快的方向，且垂直于 F 的等值线。

定义 1.3 (正则点和奇点). 对于隐式曲线 $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=0\}$，若在点 $(x_0,y_0)\in C$ 处可微且 $\nabla f(x_0,y_0)\neq 0$，则称该点为曲线的正则点。若点 $(x_0,y_0)\in C$ 满足 $\nabla f(x_0,y_0)=0$，则称 (x_0,y_0) 为曲线的**奇点**。

注 1.1. 奇异曲线的例子

- 曲线 $y^2=x^3$（尖点曲线），隐式方程为 $f(x,y)=y^2-x^3=0$。计算梯度 $\nabla f=(-3x^2,2y)$, 在原点 $(0,0)$ 处为零, 故原点为奇点 (尖点)。参数方程可用 $x=t^2, y=t^3$ 表示，有 $C'(t)=(2t,3t^2)$，在 $t=0$ 处为零。

- 曲线 $y^2=x^2(x+1)$（结点曲线），隐式方程为 $f(x,y)=y^2-x^2(x+1)=0$。梯度 $\nabla f=(-3x^2-2x,2y)$，在原点 $(0,0)$ 处为零，故原点为奇点（自交点）。该曲线在原点附近有两支相交。

- 曲线 $x^3+y^3=3xy$（笛卡尔叶形线），在原点处有自交点，梯度为零，为奇点。

1.1.1 隐函数定理与局部参数化

定义 1.4 (参数曲线)**.** 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间，称映射 $C : I \to \mathbb{R}^2$ 为一条**参数曲线**，记作 $C(t) = (x(t), y(t))$。通常要求 $x(t), y(t)$ 是 t 的可微函数，并且 $C'(t) \neq 0$ 时称为正则点。

隐式曲线在正则点附近可以局部地表示为参数曲线的形式，这一事实由隐函数定理保证。

定理 1.1 (隐函数定理（二维情形）)**.** 设 (x_0, y_0) 满足 $f(x_0, y_0) = 0$。若 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 附近可微且偏导连续，$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$，则存在 (x_0, y_0) 的一个开邻域 U，以及唯一的可微函数 $y = \phi(x)$，定义在 x_0 的某个邻域上，使得

$$\{(x, \phi(x)) \mid x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\} \subseteq C \cap U,$$

且 $\phi'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$。类似地，若 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$，则可解出 $x = \psi(y)$。

由于正则点处梯度非零，即 $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) \neq (0, 0)$，因此至少有一个偏导数非零，从而隐函数定理适用。于是，在正则点附近，隐式曲线可以局部地表示为显式函数 $y = y(x)$ 或 $x = x(y)$，这正是以 x（或 y）为参数的参数曲线。因此，隐式曲线在正则点附近总存在参数表示。

例 1.1. 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上一点 $(0, 1)$，有 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 2 \neq 0$，故可在该点附近解出 $y = \sqrt{1 - x^2}$（取正号），从而得到局部参数表示 $x \mapsto (x, \sqrt{1 - x^2})$，其中 $|x|$ 充分小。

例 1.2 (奇异点但有参数化的例子)**.** 曲线 $y^2 = x^3$（尖点曲线）在原点 $(0, 0)$ 处有奇异点（因为梯度 $\nabla f = (-3x^2, 2y)$ 在原点为 $(0, 0)$）。然而，该曲线可以整体参数化为

$$C(t) = (t^2,\ t^3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

参数曲线 $C(t)$ 满足 $y^2 = t^6 = (t^2)^3 = x^3$，且 $C(0) = (0, 0)$。在 $t = 0$ 处，$C'(0) = (0, 0)$，因此该点为参数奇点。但除此之外的点都是正则点。该参数化覆盖了整个曲线（当 t 取遍实数时，$x \geq 0$，y 可为正负）。注意，该曲线不能用一个 t 的代数参数化表示为 $x = t$ 的形式，因为 $y = \pm x^{3/2}$ 不是单值的。这里的参数化是有理的，且整体连续。

因此，尽管曲线在原点处有几何奇点（尖点），仍然存在一个整体的参数化（虽然参数在奇点处不正则）。这个例子表明：存在参数化并不保证曲线处处正则，奇点可以通过参数导数为零反映出来。

1.1.2 切线

切线是曲线在某点附近的线性近似，本节给出参数曲线和隐式曲线的切线方程。

定义 1.5 (切线). 设 C 是一条连续曲线，P 是 C 上一点。若过 P 的割线 PQ 当 Q 沿 C 趋近于 P 时趋于一条确定的直线 l（即极限方向存在且唯一），则称 l 为曲线 C 在 P 处的**切线**。

例 1.3 (无切线的连续曲线). 曲线 $y = |x|$ 在原点处，左右割线斜率分别为 -1 和 1，不存在唯一极限，故无切线。

定理 1.2 (参数曲线的切线). 设 $C(t) = (x(t), y(t))$ 是一条可微参数曲线，$t_0 \in I$ 且 $C'(t_0) \neq 0$。则曲线在点 $C(t_0)$ 处的切线方程为

$$x'(t_0)(y - y(t_0)) - y'(t_0)(x - x(t_0)) = 0,$$

或等价地，方向向量为 $(x'(t_0), y'(t_0))$，切线参数形式为 $C(t_0) + sC'(t_0)$。

证明. 切线方向由速度向量 $(x'(t_0), y'(t_0))$ 给出，因此切线上的点 (x, y) 满足存在 s 使 $(x, y) = C(t_0) + sC'(t_0)$。消去 s 即得行列式形式的方程。 □

定理 1.3 (隐式曲线的切线). 设 $f(x, y) = 0$ 定义了一条隐式曲线，(x_0, y_0) 是曲线上一点且 $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$。则曲线在 (x_0, y_0) 处的切线方程为

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

证明. 由隐函数定理，在 (x_0, y_0) 附近曲线可表示为 $y = y(x)$ 或 $x = x(y)$，且切线斜率 $k = -\frac{\partial f}{\partial x} / \frac{\partial f}{\partial y}$，代入点斜式即得。 □

例 1.4 (圆的切线). 圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 上点 (x_0, y_0) 处的切线方程为 $x_0 x + y_0 y = R^2$。

例 1.5 (椭圆). 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上点 (x_0, y_0) 处的切线方程为 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$。

1.1.3 法线

定理 1.4 (法线方程). 设曲线在点 P 处有切线，则法线是过该店与该切线垂直的直线。

- 对于参数曲线 $C(t)$ 在正则点 $C(t_0)$ 处，法线方程为

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) = 0.$$

- 对于隐式曲线 $f(x, y) = 0$ 在正则点 (x_0, y_0) 处，法线方程为

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0,$$

  或等价地，参数形式为 $(x, y) = (x_0, y_0) + t\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$。

证明. 对于参数曲线，切向量为 $\mathbf{v} = (x'(t_0), y'(t_0))$，法向量可取为该切向量旋转 $90°$：$\mathbf{n} = (-y'(t_0), x'(t_0))$，但更直接地，法线上的点 X 满足 $(\mathbf{X} - C(t_0)) \cdot \mathbf{v} = 0$，即得方程。对于隐式曲线，梯度 ∇f 是法线方向，因此法线的参数方程为上述形式，消去参数后得到点法式方程（通过叉乘或直接推导可得）。 □

例 1.6 (抛物线的法线)**.** 抛物线 $y = x^2$ 在点 (a, a^2) 处的切线斜率为 $2a$，故法线斜率为 $-1/(2a)$ (若 $a \neq 0$), 法线方程为 $y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a)$。用隐式公式：$f(x, y) = y - x^2 = 0$，$\frac{\partial f}{\partial x} = -2a$，$\frac{\partial f}{\partial y} = 1$，则法线方程为 $1 \cdot (x-a) - (-2a)(y-a^2) = 0$，即 $x - a + 2a(y - a^2) = 0$，整理得 $x + 2ay = a + 2a^3$，与点斜式等价。

注 1.2. 对于隐式曲线，若 $\nabla f \neq 0$，则梯度方向即为法线方向，法线方程可直接写出，无需计算切线斜率。

1.1.4 渐近线

渐近线是曲线向无穷远处延伸时趋近的直线。

定义 1.6 (渐近线)**.** 设 $C \subset \mathbb{R}^2$ 是一条曲线。称直线 l 为 C 的**渐近线**，如果存在一个连续映射 $\varphi : [0, \infty) \to C$ 满足 $\|\varphi(t)\| \to \infty$（当 $t \to \infty$），且对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $T > 0$，使得当 $t > T$ 时，$\operatorname{dist}\big(\varphi(t), l\big) < \varepsilon$。

例 1.7 (双曲线的渐近线)**.** 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线为 $y = \pm\frac{b}{a}x$。

1.2 一般域上的平面仿射代数曲线

定义 1.7. 设 $\mathbb{F}$ 是一个域（通常取 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$）。集合

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{F}^2 \mid f(x, y) = 0\}$$

称为一条**（平面）仿射代数曲线**。若 F 不可约，则称 C 为不可约曲线。

1.2.1 切线的代数刻画

定义 1.8. 设 $C = \{(x, y) \in \mathbb{F}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ 为一条仿射代数曲线若梯度 $(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P)) \neq (0, 0)$，则称 P 为**正则点**。此时曲线在 P 处的**切线**定义为直线

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y - y_0) = 0,$$

其中 x, y 视为 $\mathbb{F}^2$ 上的坐标函数。

定理 1.5. 设 f 是 $\mathbb{F}$ 上的多项式，$F(a, b) = 0$. 将 F 在 $P = (a, b)$ 处展开：

$$f(x, y) = f_1(x - a, y - b) + f_2(x - a, y - b) + \cdots + f_d(x - a, y - b),$$

其中 F_i 是齐次多项式。如果 $f_1 \neq 0$ 那么，那么 P 是正则点且 $f_1(x - a, y - b) = 0$ 是 F 定义的曲线 C 在 P 点处的切线方程

证明. 由定义显然。 □

例 1.8 (复数域上的切线). 曲线 $y^2 = x^3 - x$ 在点 $(1,0)$ 处，$f(x,y) = y^2 - x^3 + x$，$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + 1$，$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$，在 $(1,0)$ 处 $\frac{\partial f}{\partial x} = -2$，$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$，故切线为 $-2(x-1) = 0$，即 $x = 1$。

1.2.2 渐近线的代数求法

在这一小节，我们首先假设 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$。将 $f(x,y)$ 写成齐次部分的和：

$$f(x,y) = f_d(x,y) + f_{d-1}(x,y) + \cdots + F_0(x,y),$$

其中 f_k 是 k 次齐次多项式，$f_d \not\equiv 0$，$d = \deg f$。

定理 1.6. 设 $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 满足 $f_d(1,k) = 0$，且 $\dfrac{\partial f_d}{\partial y}(1,k) \neq 0$，并且 $f_d(0,1) \neq 0$。定义

$$b = -\frac{f_{d-1}(1,k)}{\frac{\partial f_d}{\partial y}(1,k)}.$$

则直线 $l : y = kx + b$ 是 C 的一条渐近线。

证明. 将 $y = kx + b$ 代入 $f(x,y)$，利用齐次性展开：

$$f(x, kx+b) = x^{d-1}\Big(\frac{\partial f_d}{\partial y}(1,k)b + f_{d-1}(1,k)\Big) + O(x^{d-2}).$$

由 b 的选取，括号内为零，故 $f(x, kx+b) = O(x^{d-2})$。

对于充分大的 x，$\frac{\partial f}{\partial y}(x, kx+b)$ 的主项来自 f_d 对 y 的偏导，即

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, kx+b) = df_d(0,1)x^{d-1} + O(x^{d-2}).$$

由于 $f_d(0,1) \neq 0$，主项非零，因此存在 $X_0 > 0$ 使得 $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$。考虑方程 $f(x,y) = 0$，将 $y = kx + b + \delta$ 代入，有

$$0 = f(x, kx+b) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, kx+b)\delta + O(x^{d-2}\delta^2).$$

解得 $\delta = -\dfrac{f(x,kx+b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,kx+b)} + O\left(\dfrac{1}{x^{d-1}}\right) = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$。于是存在唯一的可微函数 $y = y(x)$ 定义在 $[X_0, \infty)$ 上，满足 $y(x) = kx+b+O(1/x)$ 且 $f(x, y(x)) = 0$。从而 $\lim\limits_{x\to\infty}(y(x) - kx) = b$，即直线 l 是渐近线。 □

1.2.3 仿射变换对代数曲线的作用

一个仿射变换 $\Phi : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ 可以表示为

$$\Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{t},$$

其中 $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F})$ 是可逆线性变换，$\mathbf{t} \in \mathbb{F}^2$ 是平移向量。在坐标下，$\Phi(x, y) = (a_{11}x + a_{12}y + t_1,\ a_{21}x + a_{22}y + t_2)$。设 C 是由多项式 $f(x, y) = 0$ 定义的代数曲线。在仿射变换 Φ 下，C 的像 $\Phi(C)$ 是由方程

$$f(\Phi^{-1}(x', y')) = 0$$

定义的曲线。因为 Φ 可逆，$\Phi(C)$ 仍然是一条代数曲线，其次数等于 C 的次数（因为线性替换不改变多项式的次数）。我们有如下基本性质：

- 正则点与奇点：Φ 将正则点映为正则点，奇点映为奇点。这是因为 $\nabla(f \circ \Phi^{-1}) = A^{-\mathsf{T}}(\nabla f) \circ \Phi^{-1}$，故梯度非零性保持。
- 切线：若 C 在 P 处的切线方程为 $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - P) = 0$，则 $\Phi(C)$ 在 $\Phi(P)$ 处的切线方程为 $\mathbf{n} \cdot A^{-1}(\mathbf{x} - \Phi(P)) = 0$。
- 渐近线：仿射变换将渐近线映为渐近线。因为渐近线由曲线在无穷远处的行为决定，而仿射变换将无穷远直线（在射影意义下）映为自身（若保持方向）或另一条直线，但渐近线的像仍是原像的渐近方向。

两条代数曲线称为**仿射等价**，如果存在仿射变换将一条映为另一条。仿射几何中研究的是在仿射变换下保持不变的性质。

例 1.9 (椭圆与圆)**.** 任何椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 可通过伸缩变换 $x' = \frac{x}{a}$，$y' = \frac{y}{b}$ 变为单位圆 $x'^2 + y'^2 = 1$。因此所有椭圆仿射等价于圆，但圆与椭圆在欧氏几何中不同，在仿射几何中是相同的。

例 1.10 (双曲线)**.** 等轴双曲线 $xy = 1$ 与一般双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 可通过仿射变换互化（例如取 $x' = x/a$，$y' = y/b$ 后旋转 $45°$）。

1.3 平面二次曲线

平面二次曲线的方程可写为

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

其中 A, B, C 不全为零。引入齐次坐标 (x, y, z)，可表示为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

记 M 为上述 3×3 对称矩阵，M_0 为其左上角 2×2 子矩阵：

$$M_0=\begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}.$$

定理 1.7. 在仿射变换下，以下量的符号保持不变：

- $I_1=\det M_0=AC-\frac{B^2}{4}$，
- $I_2=\det M$。

此外，I_1 的符号决定了曲线的类型，I_2 则用于判断退化情形。

证明. 考虑仿射变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\mathbf{t},$$

其中 $T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 可逆，$\mathbf{t}=(t_1,t_2)^{\mathsf{T}}$。将 x,y 代入原方程，得到关于 x',y' 的新二次曲线，其系数矩阵记作 M' 和 M_0'。经过直接计算可得：

$$M_0'=T^{\mathsf{T}}M_0T,\qquad M'=\begin{pmatrix} T^{\mathsf{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{t}^{\mathsf{T}} & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} M \begin{pmatrix} T^{\mathsf{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{t}^{\mathsf{T}} & 1 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\det M_0'=(\det T)^2\det M_0,\qquad \det M'=(\det T)^2\det M.$$

由于 $\det T\neq 0$，所以 $\det M_0'$ 与 $\det M_0$ 同号，且 $\det M_0'=0$ 当且仅当 $\det M_0=0$；同样，$\det M'=0$ 当且仅当 $\det M=0$。因此，I_1 的符号和 I_2 是否为零是仿射不变量。 □

根据不变量 I_1 和 I_2，二次曲线可分为以下几类：

类型	I_1	I_2	标准方程
椭圆	>0	$\neq 0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
双曲线	<0	$\neq 0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
抛物线	$=0$	$\neq 0$	$y^2=2px$ 或 $x^2=2py$
两条相交直线	<0	$=0$	$x^2/a^2-y^2/b^2=0$
两条平行直线	$=0$	$=0$	$x^2=a^2$
一条直线	$=0$	$=0$	$x^2=0$
一点	>0	$=0$	$x^2/a^2+y^2/b^2=0$
无轨迹	>0	$\neq 0$	$x^2/a^2+y^2/b^2=-1$

对于非退化二次曲线，设曲线上一点 (x_0,y_0)，则切线方程为

$$Ax_0x+\frac{B}{2}(x_0y+xy_0)+Cy_0y+\frac{D}{2}(x+x_0)+\frac{E}{2}(y+y_0)+F=0.$$

1.3.1 二次曲线的有理参数化

二次曲线（非退化圆锥曲线）是次数为 2 的平面代数曲线。本节介绍常见的标准二次曲线的参数化。

- **椭圆** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，取点 $P_0=(-a,0)$，直线 $y=t(x+a)$，代入椭圆方程解得

$$x=a\,\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad y=b\,\frac{2t}{1+t^2}.$$

  当 $t\in\mathbb{R}$ 时，覆盖除 $(-a,0)$ 外的所有点（$t=\infty$ 对应 $(-a,0)$ 本身）。

- **双曲线** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，取点 $P_0=(a,0)$，直线 $y=t(x-a)$，代入得

$$x=a\,\frac{1+t^2}{1-t^2},\qquad y=b\,\frac{2t}{1-t^2}.$$

  此参数化覆盖双曲线的两支（$t^2<1$ 对应右支，$t^2>1$ 对应左支），$t=\pm1$ 对应无穷远点。

- **抛物线** $y^2=2px$，取点 $P_0=(0,0)$，直线 $y=tx$，代入得

$$x=2pt^2,\qquad y=2pt.$$

  参数 $t\in\mathbb{R}$ 覆盖整个抛物线（$t=\infty$ 对应顶点？实际顶点为 $t=0$）。

2 平面曲线的射影理论

仿射几何中，平行线不相交、某些曲线在无穷远处有渐近方向等问题，提示我们需要一个更大的框架。射影几何通过引入齐次坐标和无穷远点，使所有直线都相交，并提供了统一的观点。本节将从射影角度重新审视平面曲线，并利用射影坐标证明经典的帕斯卡定理。

2.1 射影曲线的定义与齐次化

定义 2.1. 设 $\mathbb{P}^2(\mathbb{F})$ 是射影平面，$F(X,Y,Z)$ 是一个非零的**齐次多项式**（即所有单项式次数相同）。则集合

$$C=\{[X:Y:Z]\in\mathbb{P}^2(\mathbb{F})\mid F(X,Y,Z)=0\}$$

称为一条**射影代数曲线**。F 的次数称为曲线的次数。

定义 2.2. 给定仿射曲线 $C_{\mathrm{aff}}: f(x,y)=0$，其中 $f\in\mathbb{F}[x,y]$ 是 d 次多项式。将其齐次化：

$$F(X,Y,Z)=Z^d f\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right).$$

则 F 是 d 次齐次多项式，且 C_{aff} 嵌入到射影平面 $\mathbb{P}^2$ 中作为 $C_{\mathrm{aff}}\cong\{[X:Y:Z]\mid Z\neq 0,\ F(X,Y,Z)=0\}$。射影曲线 $\overline{C}:=\{[X:Y:Z]\mid F(X,Y,Z)=0\}$ 称为 C_{aff} 的**射影闭包**。$Z=0$ 部分对应无穷远点，即 $f_d(X,Y)=0$ 的解。

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 可由三个仿射坐标卡 $U_0=\{[X:Y:Z]\mid X\neq 0\}$、$U_1=\{[X:Y:Z]\mid Y\neq 0\}$、$U_2=\{[X:Y:Z]\mid Z\neq 0\}$ 覆盖。在每个仿射开集上，通过归一化可得仿射曲线。例如在 U_2（即 $Z\neq 0$）上，令 $x=X/Z,\ y=Y/Z$，则射影曲线 $F(X,Y,Z)=0$ 变为仿射曲线 $f(x,y)=F(x,y,1)=0$。因此，射影曲线局部上就是仿射曲线。

2.1.1 射影曲线上的正则点与切线

设 $P=[X_0:Y_0:Z_0]\in\overline{C}$，即 $F(P)=0$。若梯度 $\nabla F(P)=(\frac{\partial F}{\partial X}(P),\frac{\partial F}{\partial Y}(P),\frac{\partial F}{\partial Z}(P))\neq(0,0,0)$，则称 P 是 $\overline{C}$ 的**正则点**（或光滑点）。此时，曲线在 P 处的**切线**方程为

$$\frac{\partial F}{\partial X}(P)X+\frac{\partial F}{\partial Y}(P)Y+\frac{\partial F}{\partial Z}(P)Z=0. \tag{1}$$

这是一个齐次线性方程，定义了一条射影直线。

引理 2.1 (欧拉关系)**.** 对于 d 次齐次多项式 $F(X,Y,Z)$，有

$$X\frac{\partial F}{\partial X}(X,Y,Z)+Y\frac{\partial F}{\partial Y}(X,Y,Z)+Z\frac{\partial F}{\partial Z}(X,Y,Z)=d\,F(X,Y,Z). \tag{2}$$

证明. 由齐次性 $F(\lambda X,\lambda Y,\lambda Z)=\lambda^d F(X,Y,Z)$，两边对 λ 求导并令 $\lambda=1$ 即得。 □

定理 2.1 (正则点定义的等价性)**.** 点 $P=[X_0:Y_0:Z_0]\in\overline{C}$ 是射影正则点当且仅当它在任一仿射坐标卡中对应的仿射点是正则点。

证明. 仅考虑 $Z_0\neq 0$ 的情形（其他坐标卡类似）。设 $x=X/Z,\ y=Y/Z$，则仿射曲线为 $f(x,y)=F(x,y,1)=0$，对应点 $(x_0,y_0)=(X_0/Z_0,Y_0/Z_0)$。由链式法则，$\frac{\partial f}{\partial x}(P)=\frac{\partial F}{\partial X}(P)$，$\frac{\partial f}{\partial y}(P)=\frac{\partial F}{\partial Y}(P)$，且由欧拉关系可得 $\frac{\partial F}{\partial Z}(P)=-x_0\frac{\partial f}{\partial x}(P)-y_0\frac{\partial f}{\partial y}(P)$。若 $\frac{\partial F}{\partial X}(P)=\frac{\partial F}{\partial Y}(P)=0$，则欧拉关系给出 $Z_0\frac{\partial F}{\partial Z}(P)=0$，故 $\frac{\partial F}{\partial Z}(P)=0$，即 $\nabla F(P)=0$。反之，若 $\nabla F(P)=0$，则显然 $\frac{\partial f}{\partial x}(P)=\frac{\partial f}{\partial y}(P)=0$。因此，$\nabla F(P)\neq 0$ 当且仅当 $(\frac{\partial f}{\partial x}(P),\frac{\partial f}{\partial y}(P))\neq(0,0)$。 □

定理 2.2 (射影切线与仿射切线的一致性)**.** 设 $P\in\overline{C}$ 是正则点且 $Z_0\neq 0$（即位于仿射坐标卡 U_2 中），则射影切线方程 (1) 在 U_2 上化为仿射曲线 $f(x,y)=0$ 在 (x_0,y_0) 处的切线方程。

证明. 在 U_2 中，$Z \neq 0$，可令 $x = X/Z$, $y = Y/Z$。将 (1) 两边除以 Z，并利用 $\frac{\partial F}{\partial X}(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$，$\frac{\partial F}{\partial Y}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ 以及 $\frac{\partial F}{\partial Z}(P) = -x_0\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - y_0\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$，得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(X - x_0 Z) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(Y - y_0 Z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

这正是仿射切线方程。 □

定理 2.3 (无穷远点切线与渐近线). 假设 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$。设 $P = [u : v : 0]$ 是射影曲线 $\overline{C}$ 的正则点，则直线 l 由 (1) 定义是仿射曲线 C_{aff} 的一条渐近线。

证明. 我们仅考虑 $b = \frac{\partial F}{\partial Y}(P) \neq 0$ 的情形（斜渐近线），垂直情形（$b = 0$）可类似处理，只需交换 x 和 y 的角色。

不失一般性，假设 $u \neq 0$。令 $X = 1$（通过齐次坐标缩放），则 P 变为 $[1 : v' : 0]$，其中 $v' = v/u$。我们仍用 v 表示这个值。考虑方程 $F(1, Y, Z) = 0$。由于 $\frac{\partial F}{\partial Y}(1, v, 0) \neq 0$，由隐函数定理，存在唯一的解析函数 $Y(Z)$ 定义在 $Z = 0$ 附近，满足 $Y(0) = v$ 且 $F(1, Y(Z), Z) = 0$。则曲线在 P 附近的参数化为 $[1 : Y(Z) : Z]$，Z 为参数。对应的仿射点（在 $Z \neq 0$ 时）为

$$x(Z) = \frac{1}{Z}, \quad y(Z) = \frac{Y(Z)}{Z}.$$

将 $y(Z)$ 展开为 $y(Z) = \frac{v + Y'(0)Z + O(Z^2)}{Z} = \frac{v}{Z} + Y'(0) + O(Z)$。因此

$$y(x) = vx + Y'(0) + o(1), \quad x \to \infty.$$

现在计算直线 l 的系数。由欧拉关系，$1 \cdot \frac{\partial F}{\partial X} + v \cdot \frac{\partial F}{\partial Y} + 0 \cdot \frac{\partial F}{\partial Z} = dF(1, v, 0) = 0$，从 $F(1, v, 0) = 0$ 可得 $\frac{\partial F}{\partial X}(1, v, 0) + v\frac{\partial F}{\partial Y}(1, v, 0) = 0$。由隐函数方程 $F(1, Y(Z), Z) = 0$ 对 Z 求导，得

$$\frac{\partial F}{\partial Y}(1, Y(Z), Z)) \cdot Y'(Z) + \frac{\partial F}{\partial Z}(1, Y(Z), Z)) = 0.$$

令 $Z = 0$，此时 $Y(0) = v$，从而得到 $vx + Y'(0) = 0$ 是 $X\frac{\partial F}{\partial X}(1, v, 0) + Y\frac{\partial F}{\partial Y}(1, v, 0) + Z\frac{\partial F}{\partial Z}(1, v, 0)$ 在仿射平面 $\{[X : Y : Z] \mid Z \neq 0\}$ 上的限制，证毕。 □

2.2 射影变换与二次曲线

设 $\mathbb{P}^2(\mathbb{F})$ 是射影平面，一个射影变换 Φ 由可逆线性变换 $T \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{F})$ 诱导：

$$\Phi([X : Y : Z]) = [T(X, Y, Z)^{\mathsf{T}}].$$

在齐次坐标下，记 $\mathbf{X} = (X, Y, Z)^{\mathsf{T}}, [\mathbf{X}] := [X : Y : Z]$，则 $\Phi(\mathbf{X}) = [M\mathbf{X}]$，其中 $M \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{F})$。

对于一条射影代数曲线 $C : F(\mathbf{X}) = 0$（F 是 d 次齐次多项式），其像 $\Phi(C)$ 的方程为 $F(M^{-1}\mathbf{X}') = 0$，仍是一条 d 次代数曲线。因此，次数是射影不变量。

定理 2.4 (正则性与奇点)**.** 设 C 由 $F(\mathbf{X})=0$ 定义, $P \in C$。则 P 是正则点 ($\nabla F(P) \neq \mathbf{0}$) 当且仅当 $\Phi(P)$ 是 $\Phi(C)$ 的正则点。设 P 是 C 的正则点，l 是 C 在 P 处的切线，则 $\Phi(l)$ 是 $\Phi(C)$ 在 $\Phi(P)$ 处的切线。

证明. 设 $Q=\Phi(P)=MP$。曲线 $\Phi(C)$ 的方程为 $G(\mathbf{Y})=F(M^{-1}\mathbf{Y})=0$。梯度满足

$$\nabla G(Q)=M^{-\mathsf{T}}\nabla F(P).$$

由于 M 可逆，$M^{-\mathsf{T}}$ 可逆，故 $\nabla F(P) \neq \mathbf{0}$ 当且仅当 $\nabla G(Q) \neq \mathbf{0}$。

切线方程可写为 $\nabla F(P)^{\mathsf{T}}\mathbf{X}=0$。在射影变换 $[X] \mapsto [\mathbf{Y}] := [M\mathbf{X}]$ 下，该方程变为 $\nabla F(P)^{\mathsf{T}}M^{-1}\mathbf{Y}=0$，即 $(M^{-\mathsf{T}}\nabla F(P))^{\mathsf{T}}\mathbf{Y}=0$。这正是曲线 G 在 Q 处的切线方程。 □

2.2.1 二次曲线的矩阵表示与射影变换

一条二次曲线 C 可由一个 3×3 对称矩阵 Q 表示为

$$\mathbf{X}^{\mathsf{T}}Q\mathbf{X}=0, \qquad Q^{\mathsf{T}}=Q,\ \mathbf{X}=(X,Y,Z)^{\mathsf{T}}.$$

在射影变换 $\mathbf{X}'=M\mathbf{X}$（$M \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{F})$）下，新坐标为 $\mathbf{X}=M^{-1}\mathbf{X}'$，代入得

$$(M^{-1}\mathbf{X}')^{\mathsf{T}}Q(M^{-1}\mathbf{X}')=\mathbf{X}'^{\mathsf{T}}(M^{-\mathsf{T}}QM^{-1})\mathbf{X}'=0.$$

因此，像曲线 $C'=\Phi(C)$ 的矩阵为

$$Q'=N^{\mathsf{T}}QN.$$

此处 $N=M^{-1}$，即 Q 与 Q' 是合同矩阵。对于实对称矩阵 Q，存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{\mathsf{T}}QP=\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 p,q 分别为正、负特征值的个数（计重数），$r=p+q$ 为秩。称 (p,q) 为 Q 的**惯性指数**。

定理 2.5 (西尔维斯特惯性定律)**.** 惯性指数 (p,q) 在合同变换下不变：若 $Q'=N^{\mathsf{T}}QN$ 且 N 可逆，则 Q' 与 Q 有相同的 p,q。

证明. 由二次型理论，实对称矩阵的规范形是唯一的，即正、负、零的个数由 Q 唯一确定，不依赖于合同变换的选择。因此惯性指数是合同不变量。 □

定理 2.6. 对于二次曲线 C，$\operatorname{rank} Q$ 在射影变换下保持不变。设 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$，则 Q 的惯性指数在射影变换下保持不变。

2.2.2 二次曲线的射影分类

在复数域 $\mathbb{C}$ 上，所有非退化二次曲线 ($\operatorname{rank} Q = 3$) 都射影等价于 $X^2+Y^2+Z^2=0$ (因为复对称矩阵合同于单位矩阵)。

在实射影平面 $\mathbb{RP}^2$ 中，如果我们不考虑没有实点的情况（即惯性指数 $(3,0)$ 或 $(0,3)$，例如 $X^2+Y^2+Z^2=0$），任何非退化二次曲线（$\operatorname{rank} Q=3$）在射影变换下等价于 $X^2+Y^2-Z^2=0$，称为 **(实射影) 圆锥曲线**。所有实圆锥曲线（包括椭圆、双曲线、抛物线）在射影几何中是彼此等价的，因为它们可以通过射影变换互相转化。例如，通过变换 $(X,Y,Z)\mapsto(X,Y,X+Z)$ 可将圆 $X^2+Y^2=Z^2$ 变为抛物线 $Y^2=2XZ$；通过适当的射影变换还可将抛物线变为双曲线。因此，在射影几何中不再区分椭圆、双曲线、抛物线。

如果 $r=\operatorname{rank} Q<3$，我们有

- $r=2$：
  - 两条相交直线（实直线），例如 $X^2-Y^2=0$。
  - 两条平行直线（在射影平面中相交于无穷远点，故属相交直线），例如 $X^2-Z^2=0$ 在仿射平面 $Z=1$ 上为 $x^2=1$，即 $x=1$ 和 $x=-1$。
  - 一对共轭虚直线（交于一个实点），例如 $X^2+Y^2=0$ 在实数域上仅有点 $[0:0:1]$，通常说它代表一个实点。
- $r=1$：一条二重直线，例如 $X^2=0$（即直线 $X=0$ 计两次）。

这些退化情形在射影变换下也保持其类型（但两条平行直线在射影平面中相交于无穷远点，因此属于相交直线类）。

2.2.3 二次曲线的射影参数化

定理 2.7. 任何非退化二次曲线 $C\subset\mathbb{P}^2(\mathbb{F})$ 都有一个整体有理参数化，即存在一一对应

$$\varphi:\mathbb{P}^1\longrightarrow C.$$

证明. 将 C 化为标准形，对于圆锥曲线 $XZ=Y^2$，有

$$\Phi:\mathbb{P}^1(\mathbb{R})\longrightarrow C,\qquad [s:t]\longmapsto[s^2:st:t^2],$$

我们首先验证这是一个单射。设 $\Phi([s:t])=\Phi([s':t'])$，则存在非零 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得

$$s^2=\lambda s'^2,\quad st=\lambda s't',\quad t^2=\lambda t'^2. \tag{1}$$

解得 $s=\pm\sqrt{\lambda}s', t=\pm\sqrt{\lambda}t'$，从而我们得到 $[s:t]=[s':t']$，即 Φ 是单射。

我们验证这是一个满射。任取 $[X:Y:Z]\in C$，

- 若 $Z \neq 0$，则令 $[s:t]=[Y/Z:1]$ 即得 $\Phi([s:t])=[Y^2/Z^2:Y/Z:1]=[XZ/Z^2:Y/Z:1]=[X:Y:Z]$。
- 若 $Z=0$，则 $XZ=0$，从而 $Y^2=0$，即 $Y=0$。点即为 $[X:0:0]$，可写为 $[1:0:0]$。取 $s=1, t=0$，则像为 $[1:0:0]$。因此满射。

所以 Φ 是双射。 $\square$

例 2.1. 复数域上，取 $C: X^2+Y^2+Z^2=0$。则参数化可写为

$$\varphi([s:t])=[s^2-t^2:2st:i(s^2+t^2)].$$

取 $C: X^2+Y^2-Z^2=0$。则参数化可写为

$$\varphi([s:t])=[s^2-t^2:2st:s^2+t^2].$$

2.2.4 圆锥曲线与交比

定理 2.8 (Steiner)**.** 设 $\Gamma \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{F})$ 是一条非退化圆锥曲线，A, B, C, D 是 Γ 上四个固定的不同点。则对于 Γ 上任意一点 P (不同于 A, B, C, D), 直线的交比 $(PA, PB; PC, PD)$ 是一个常数，与 X 的选取无关。

证明. 取非退化二次曲线 C 的标准形式 $XZ=Y^2$，其有理参数化为

$$\Phi: \mathbb{P}^1(\mathbb{F}) \to C, \qquad [s:t] \mapsto [s^2:st:t^2].$$

固定四个点 A, B, C, D，对应参数分别为 $[a_1:a_2], [b_1:b_2], [c_1:c_2], [d_1:d_2]$。设动点 P 对应参数 $[x_1:x_2]$。

直线 PA 上两点为 $P=[x_1^2:x_1x_2:x_2^2]$，$A=[a_1^2:a_1a_2:a_2^2]$。直线方程的行列式为

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\ a_1^2 & a_1a_2 & a_2^2 \end{vmatrix}=0.$$

展开得:

$$X(x_1x_2a_2^2-x_2^2a_1a_2)-Y(x_1^2a_2^2-x_2^2a_1^2)+Z(x_1^2a_1a_2-x_1x_2a_1^2)=0.$$

同时处以 $(x_1a_2-x_2a_1)$, 得到其对偶点的坐标为

$$PA^*=[x_2a_2:-(x_1a_2+x_2a_1):x_1a_1].$$

类似地,

$$PB^*=[x_2b_2:-(x_1b_2+x_2b_1):x_1b_1],$$

$$PC^* = [x_2c_2,: -(x_1c_2 + x_2c_1),: x_1c_1],$$

$$PD^* = [x_2d_2,: -(x_1d_2 + x_2d_1) : x_1d_1].$$

由于 A, B, C, D 是四个不同的点，存在常数 α, β 使得

$$(c_1, c_2) = \alpha_C(a_1, a_2) + \beta_C(b_1, b_2), \quad (d_1, d_2) = \alpha_D(a_1, a_2) + \beta_D(b_1, b_2)$$

那么直接验算可得

$$(PA, PB; PC, PD) = (PA^*, PB^*; PC^*, PD^*) = \frac{\alpha_C\beta_D}{\beta_C\alpha_D} = (A, B; C, D),$$

该值只依赖于 A, B, C, D 的参数，与 P 无关。 □

推论 2.1. 在射影平面上，给定五个点，其中任意三点不共线，则存在唯一一条非退化圆锥曲线通过它们。

证明. 设给定五点 A, B, C, D, E。考察 $\{P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid (AP, BP; CP, DP) = (AE, BE; CE, DE)$ 这是一条二次曲线（因为交比条件给出二次方程），唯一性由 Steiner 定理可得。 □

定理 2.9 (帕斯卡定理)**.** 设 Γ 是一条非退化圆锥曲线（在实射影平面或复射影平面中），$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 是 Γ 上六个不同的点。将这些点按顺序连接成六边形 $A_1A_2A_3A_6A_5A_4$。则三对对边的交点

$$P = A_1A_5 \cap A_4A_2, \qquad Q = A_3A_4 \cap A_6A_1, \qquad R = A_5A_3 \cap A_2A_6$$

共线。

证明. 设 PQ 所在直线与 A_2A_6 的交为 S，A_3A_4 与 A_2A_6 的交为 T，A_4A_2 与 A_1A_6 的交为 U，那么在直线 A_2A_6 上

$$\begin{aligned}
(A_2, T; S, A_6) &= (QA_2, A_3A_4; PQ, A_1A_6) = (A_2, A_4; P, U) \\
&= (A_1A_2, A_1A_4; A_1A_5, A_1A_6) \\
&= (A_3A_2, A_3A_4; A_3A_5, A_3A_6) \\
&= (A_2, T; R, A_6),
\end{aligned}$$

由第二章引理 3.2，$S = R$。 □

2.2.5 极点与极线

极点与极线是二次曲线理论中的一对核心概念，它揭示了点与直线之间关于一条二次曲线的深刻对偶关系。在射影几何的框架下，这一关系可以用矩阵语言简洁地表达，并自然地导出切线的方程以及切点公式。

定义 2.3 (极线)**.** 对于非退化二次曲线 $\mathcal{C} := \{[\mathbf{x}^\top] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}) \mid \mathbf{x}^\top Q\mathbf{x} = 0\}$ 和任意一点 $P = [\mathbf{p}^\top] \in \mathbb{P}^2$（$P$ 不必在 $\mathcal{C}$ 上），直线

$$\{[\mathbf{x}^\top] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}) \mid \mathbf{x}^\top Q\mathbf{p} = 0\}$$

称为点 P 关于 $\mathcal{C}$ 的**极线**。极线的对偶点为 $[(Q\mathbf{p})^\top]$。反之，对于任意一条直线 $L \subset \mathbb{P}^2$，假设其对偶点 $L^* = [\boldsymbol{\ell}^\top] \in \mathbb{P}^2$。

$$[\boldsymbol{\ell}^\top Q^{-1}]$$

称为直线 $\boldsymbol{\ell}$ 关于 $\mathcal{C}$ 的**极点**。

极点与极线的关系是相互的：若点 P 的极线是 L，则 L 的极点就是 P。这是因为 $Q^{-1}(Q\mathbf{p}) = \mathbf{p}$（最多差一个非零标量因子）。

定理 2.10 (切线)**.**

1. 设 $P = [\mathbf{p}^\top] \in \mathcal{C}$，即 $\mathbf{p}^\top Q\mathbf{p} = 0$。则点 P 的极线 L_P 就是 $\mathcal{C}$ 在点 P 处的切线。

2. 一条直线 L（对偶点 $[\boldsymbol{\ell}^\top]$）与 $\mathcal{C}$ 相切，当且仅当

$$\boldsymbol{\ell}^\top Q^{-1}\boldsymbol{\ell} = 0.$$

此时切点即为直线的极点：$P = [\,(\boldsymbol{\ell}^\top Q^{-1})^\top\,]$。

证明.（1）由切线方程显然。（2）L 是切线 $\iff$ 存在唯一点 $P = [\mathbf{p}^\top] \in \mathcal{C}$ 使得 L 是 P 的极线。由极线定义，$\mathbf{p} = Q^{-1}\boldsymbol{\ell}$。 □

由此我们可以引入**对偶二次曲线**的概念。

定义 2.4 (对偶二次曲线)**.** 与非退化二次曲线 $\mathcal{C} : \mathbf{x}^\top Q\mathbf{x} = 0$ 相伴的 **对偶二次曲线**由矩阵 Q^{-1}（或与之成比例的对称矩阵）表示：

$$\mathcal{C}^* = \left\{ [\boldsymbol{\ell}^\top] \in \mathbb{P}^2 \;\middle|\; \boldsymbol{\ell}^\top Q^{-1}\boldsymbol{\ell} = 0 \right\}.$$

它由所有与 $\mathcal{C}$ 相切的直线构成。

定理 2.11 (极线是切点连线)**.** 设 $\mathcal{C} : \mathbf{x}^\top Q\mathbf{x} = 0$ 为非退化二次曲线，$P = [\mathbf{p}^\top] \in \mathbb{P}^2$ 是不在 $\mathcal{C}$ 上的一点。若过 P 可作 $\mathcal{C}$ 的两条切线（在复数域中总有两条），则这两个切点的连线恰好就是点 P 的极线

$$L_P = \{\, [\mathbf{x}^\top] \in \mathbb{P}^2 \mid \mathbf{x}^\top Q\mathbf{p} = 0 \,\}.$$

证明. 设 $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ 分别是两个切点的齐次坐标向量。因为切点在二次曲线上，故

$$\mathbf{t}_i^\top Q\mathbf{t}_i = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{1}$$

又因为过切点的切线经过 P，且切线的齐次方程为 $\mathbf{x}^\top Q\mathbf{t}_i = 0$（切点处的极线），代入点 P 得

$$\mathbf{p}^\top Q\mathbf{t}_i = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{2}$$

由于 Q 是对称矩阵，$\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ 都满足线性方程 $\mathbf{x}^\top Q\mathbf{p} = 0$，而该方程表示的正是点 P 的极线 L_P。因此 $T_1 = [\mathbf{t}_1^\top]$ 和 $T_2 = [\mathbf{t}_2^\top]$ 都在 L_P 上。 □

注 2.1. 若只考虑实数域，当点 P 在椭圆外时，两条切线都是实的，切点连线是实线段；当 P 在椭圆内时，实切线不存在，但复数域上仍有两条切线，切点连线是实直线（它在欧氏平面上仍然可见），这正是椭圆内部点极线的几何意义——它仍由形式上「两个虚切点的连线」给出。

例 2.2 (椭圆的极点与极线)**.** 考虑椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$，在齐次坐标下有理化为

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

取点 $P = [(2, 0, 1)^\top]$，即欧氏点 $(2, 0)$，它恰好在椭圆上。其极线由 $\mathbf{x}^\top Q\mathbf{p} = 0$ 给出，计算

$$Q\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

故极线方程为 $\frac{1}{2}x + 0 \cdot y - z = 0$，即 $x = 2z$，对应欧氏直线 $x = 2$。这正是在点 $(2, 0)$ 处的切线。

再取椭圆外一点 $P' = [(4, 0, 1)^\top]$，其极线为

$$Q\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

方程为 $x - z = 0$，即 $x = 1$。可以验证：过 $(4, 0)$ 作椭圆的两条切线的切点连线恰好就是直线 $x = 1$。

3 平行直线的透视收敛：消失点的几何推导

透视投影最显著的特征之一，便是三维空间中原本互相平行的直线，在画面上不再保持平行，而是汇聚于一个共同点——消失点。本节将从最基本的几何元素出发，建立相机投影模型，并严格证明：消失点恰恰是相应空间方向上无穷远点的投影；该点的位置完全由相机的朝向与内部结构决定，而与相机所处的位置无关。

3.1 相机建模：光心、焦距与图像平面

定义 3.1 (相机标架). 相机在空间中占据一个点 C，称为**光心**。以 C 为原点建立一个右手直角标架 $[C;\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]$，即 $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ 为一组单位正交基，且 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{w}$，称为**相机标架**，其中

- $\mathbf{w}$ 指向观察方向（光轴），
- $\mathbf{u}$ 指向相机右侧，
- $\mathbf{v}$ 指向相机下方（使图像坐标的 y 轴向下）。

定义 3.2 (世界标架到相机标架的变换). 设空间中有一个固定的直角坐标系 $[O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]$，称为**世界标架**。光心 C 在世界标架下的坐标为 $\mathbf{C}=(C_x,C_y,C_z)^\top$。令 $R=(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})=(r_{i,j})_{1\le i,j\le 3}$ 为一个 3×3 正交矩阵。对任意空间点 P，记其在世界标架下的坐标为 $\mathbf{X}_w=(X_w,Y_w,Z_w)^\top$，则它在相机标架下的坐标 $\mathbf{X}_c=(X_c,Y_c,Z_c)^\top$ 由下式给出

$$\mathbf{X}_c=R(\mathbf{X}_w-\mathbf{C})=R\mathbf{X}_w+\mathbf{t}, \tag{3}$$

其中 $\mathbf{t}=-R\mathbf{C}$ 为平移向量。

定义 3.3 (图像平面与物理投影). 在相机标架中，距光心 f（$f>0$）且垂直于光轴的平面称为 **图像平面**（或焦平面）。f 称为**焦距**。一个空间点 P 在图像平面上的像是光心 C 与 P 连线与图像平面的交点。设 P 在相机标架下的坐标为 $\mathbf{X}_c=(X_c,Y_c,Z_c)^\top$，$Z_c>0$，即在世界标架下的坐标满足 $r_{3,1}(X_w-C_x)+r_{3,2}(Y_w-C_y)+r_{3,3}(Z_w-C_z)>0$。由相似三角形（图 1）可得，像点在相机标架下的坐标为

$$x=f\frac{X_c}{Z_c},\qquad y=f\frac{Y_c}{Z_c},\qquad z=f. \tag{4}$$

称 (x,y) 为**图像坐标**。

定义 3.4 (像素坐标与主点). 图像平面上任点 (x,y) 经过传感器采样后，在照片上产生唯一的像素坐标 (u,v)。设光轴与图像平面的交点（即相机标架下坐标为 $(0,0,f)$ 的点）在像素网格中的坐标为 (u_0,v_0)，称为**主点**。假设该采样过程是线性的，即存在两个正常数 $\alpha_x,\alpha_y>0$，使得

$$u=u_0+\alpha_x x,\qquad v=v_0+\alpha_y y. \tag{5}$$

这里 α_x,α_y 包含了传感器对几何长度的量化密度，

定义 3.5 (像素焦距). 称

$$f_x=\alpha_x f,\qquad f_y=\alpha_y f$$

为相机的**像素焦距**。利用 (4) 和 (5)，直接从相机坐标到像素坐标的投影公式为

$$u=f_x\frac{X_c}{Z_c}+u_0,\qquad v=f_y\frac{Y_c}{Z_c}+v_0. \tag{6}$$

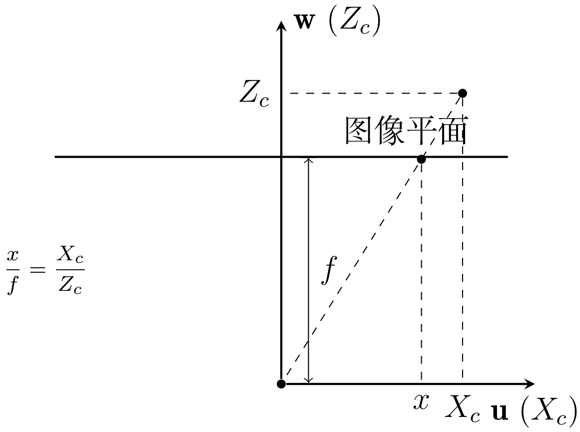

图 1: 针孔投影中的相似三角形（侧视图）。从空间点 P 出发穿过光心 C 的光线，在图像平面上留下像点 (x, y)。由相似三角形关系可推导出成像公式。

3.2 齐次坐标表示

定义 3.6. 定义 $\Phi : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \setminus \{[C_x; C_y; C_z; 1]\} \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), [a_0; a_1; a_2; a_3] \mapsto [b_0; b_1; b_2]$，其中

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_x & 0 & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{K} \underbrace{(R \mid \mathbf{t})}_{\text{外参}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

其中 K 仅依赖于 f_x, f_y, u_0, v_0，称为**内参数矩阵**；$(R \mid \mathbf{t})$ 仅依赖于相机相对于世界标架的位置和朝向，称为 **外参数**。

命题 3.1 (投影矩阵)**.** 对于三维点 $\mathbf{X}_w = (X_w, Y_w, Z_w)^\top \neq C$，记 $\widetilde{\mathbf{X}}_w = [X_w; Y_w; Z_w; 1]$。对于二维图像点 $(u, v)^\top$，记 $\widetilde{\mathbf{u}} = [u; v; 1]$。那么拍摄照片（即(3)(5)）可视为一个映射

$$\phi : H^+ \to \mathbb{R}^2, (X_w, Y_w, Z_w)^\top \mapsto (u, v)^\top,$$

由关系 $\Phi(\widetilde{\mathbf{X}}_w) = \widetilde{\mathbf{u}}$ 唯一确定，其中

$$H^+ = \{(X_w, Y_w, Z_w) \in \mathbb{R}^3 \mid r_{3,1}(X_w - C_x) + r_{3,2}(Y_w - C_y) + r_{3,3}(Z_w - C_z) > 0\}$$

即相机前方这个半空间。

证明.

$$K(R \mid \mathbf{t}) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_w \\ 1 \end{pmatrix} = K(R\mathbf{X}_w + \mathbf{t}) = K\mathbf{X}_c.$$

将 K 和 $\mathbf{X}_c = (X_c, Y_c, Z_c)^\top$ 代入，有

$$K\mathbf{X}_c = \begin{pmatrix} f_x & 0 & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x X_c + u_0 Z_c \\ f_y Y_c + v_0 Z_c \\ Z_c \end{pmatrix}.$$

用最后一个分量 Z_c 通除前两个分量即可。 $\square$

引理 3.1. 设 L 为空间中一直线，其参数方程为

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{a} + s\mathbf{d}, \qquad s \in \mathbb{R},$$

其中 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ 为线上一点，$\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ 为方向向量。假设 $L \cap H^+ \neq \varnothing$，即存在 s 使得 $\mathbf{X}(s)$ 位于相机前方。定义

$$\mathbf{b}_0 = K(R\mathbf{a} + \mathbf{t}), \qquad \mathbf{r} = KR\mathbf{d}.$$

如果 L 不过光心 C，则 $\mathbf{b}_0$ 与 $\mathbf{r}$ 线性无关，切 $\phi(L \cap H^+)$ 落在 $\mathbb{R}^2$ 中的一条直线上

$$(\mathbf{b}_0 \times \mathbf{r})^\top \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \tag{8}$$

若 L 过光心，那么 $\mathbf{b}_0$ 与 $\mathbf{r}$ 线性相关，$\phi(L \cap H^+)$ 退化为单个点，齐次坐标为恰为 $\mathbf{r}$。

证明. 将 L 上的点写为齐次坐标 $\widetilde{\mathbf{X}}(s) = [(\mathbf{a} + s\mathbf{d})^\top; 1]$。当 s 使得 $\mathbf{X}(s) \in H^+$ 时，注意到

$$K(R \mid \mathbf{t}) \begin{bmatrix} \mathbf{a} + s\mathbf{d} \\ 1 \end{bmatrix} = K(R\mathbf{a} + \mathbf{t}) + s\,KR\mathbf{d} = \mathbf{b}_0 + s\mathbf{r}.$$

若 $\mathbf{b}_0$ 与 $\mathbf{r}$ 线性无关，则该向量落在垂直于 $\mathbf{b}_0, \mathbf{r}$ 张成的二维线性子空间中，因此

$$\Phi(L \cap H^+) \subset \{[x; y; z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid (\mathbf{b}_0 \times \mathbf{r})^\top \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\}.$$

其在 $\mathbb{R}^2$ 上的限制的方程即为 $(\mathbf{b}_0 \times \mathbf{r})^\top (u; v; 1)^\top = 0$。若 $\mathbf{b}_0$ 与 $\mathbf{r}$ 线性相关，则存在 s_0 使 $\mathbf{b}_0 + s_0\mathbf{r} = \mathbf{0}$，此时 $\phi(L \cap H^+)$ 退化为单个射影点。 $\square$

推论 3.1 (消失点)**.** 设 $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 为一固定方向向量，且 $\mathbf{d}$ 与 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 线性无关。考虑空间中所有方向平行于 $\mathbf{d}$ 的直线，其拍照得到的像的交汇于同一个固定点 $\mathbf{v_d} \in \mathbb{R}^2$，满足

$$[\mathbf{v_d}^\top; 1] = [(KR\,\mathbf{d})^\top] = \Phi([\mathbf{d}^\top; 0]), \tag{9}$$

称该点为方向 $\mathbf{d}$ 的**消失点**。

证明. 设方向 $\mathbf{d}$ 与 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 线性无关，现在任取一条方向向量为 $\mathbf{d}$ 的直线 L，那么 $L \cap H^+ \neq \emptyset$。由引理 3.1，显然。 $\square$

3.3 同一相机不同标架下的点对应关系

前面的讨论只涉及单个相机标架 $[C; \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$，现在考虑**同一台相机**（内参矩阵 K 不变）移动到新的位姿。设初始时刻相机标架为 $[C_1; \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1]$，对应的外参数记为 $R_1, \mathbf{t}_1$；运动后相机标架变为 $[C_2; \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2]$，对应的外参数为 $R_2, \mathbf{t}_2$。

在两个位置拍照，分别得到映射 $\Phi_1 : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \setminus \{\widetilde{C}_1\} \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \Phi_2 : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \setminus \{\widetilde{C}_2\} \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$,

现在考察 $\Phi_1(\widetilde{\mathbf{X}}_w)$ 和 $\Phi_2(\widetilde{\mathbf{X}}_w)$ 的关系。我们首先定义下面记号

定义 3.7. 对任意向量 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^\top \in \mathbb{R}^3$，定义

$$[\mathbf{v}]_\times = \begin{pmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

该矩阵满足 $[\mathbf{v}]_\times^\top = -[\mathbf{v}]_\times$，且对任意 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ 有

$$[\mathbf{v}]_\times \mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}.$$

由此立得 $\mathbf{w}^\top [\mathbf{v}]_\times \mathbf{w} = 0$。当 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ 时，$[\mathbf{v}]_\times$ 的秩为 2。

定理 3.1. 令

$$F = K^{-\top} [\bar{\mathbf{t}}]_\times R\, K^{-1}. \tag{11}$$

其中

$$R = R_2 R_1^\top, \qquad \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{t}_2 - R\mathbf{t}_1,$$

设 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}, [\mathbf{u}_1^\top] = \Phi_1([\mathbf{v}^\top]), [\mathbf{u}_2^\top] = \Phi_2([\mathbf{v}^\top])$，那么

$$\mathbf{u}_2^\top F\, \mathbf{u}_1 = 0,$$

证明. 由定义，存在非零常数 α, β 使得

$$\mathbf{u}_1 = \alpha K(R_1 \mid \mathbf{t}_1)\mathbf{v}, \qquad \mathbf{u}_2 = \beta K(R_2 \mid \mathbf{t}_2)\mathbf{v}.$$

将 $\mathbf{v}$ 写成分块形式 $(\mathbf{y}^\top, s)^\top$，其中 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, $s \in \mathbb{R}$。令

$$\mathbf{X}_{c1} = R_1\mathbf{y} + \mathbf{t}_1 s, \qquad \mathbf{X}_{c2} = R_2\mathbf{y} + \mathbf{t}_2 s,$$

则 $\mathbf{u}_1 = \alpha K\mathbf{X}_{c1}, \mathbf{u}_2 = \beta K\mathbf{X}_{c2}$。因此 $\mathbf{X}_{c2} = R\mathbf{X}_{c1} + \bar{\mathbf{t}}s$。

由 K 可逆，得

$$K^{-1}\mathbf{u}_1 = \alpha\mathbf{X}_{c1}, \qquad K^{-1}\mathbf{u}_2 = \beta\mathbf{X}_{c2}.$$

代入保距变换关系：

$$\beta^{-1}K^{-1}\mathbf{u}_2 = R(\alpha^{-1}K^{-1}\mathbf{u}_1) + \bar{\mathbf{t}}s.$$

整理为

$$K^{-1}\mathbf{u}_2 = \lambda R K^{-1}\mathbf{u}_1 + \mu\bar{\mathbf{t}},$$

其中 $\lambda = \beta/\alpha \neq 0$，$\mu = \beta s$（当 $s = 0$ 时 $\mu = 0$）。

两边左乘平移向量的反对称矩阵 $[\bar{\mathbf{t}}]_\times$，并利用 $[\bar{\mathbf{t}}]_\times \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{0}$，得到

$$[\bar{\mathbf{t}}]_\times K^{-1}\mathbf{u}_2 = \lambda [\bar{\mathbf{t}}]_\times R K^{-1}\mathbf{u}_1.$$

再左乘 $(K^{-1}\mathbf{u}_2)^\top$。因为 $[\bar{\mathbf{t}}]_\times$ 是反对称矩阵，对任意向量 $\mathbf{w}$ 有 $\mathbf{w}^\top[\bar{\mathbf{t}}]_\times\mathbf{w} = 0$，取 $\mathbf{w} = K^{-1}\mathbf{u}_2$，则左边为零：

$$0 = \lambda (K^{-1}\mathbf{u}_2)^\top [\bar{\mathbf{t}}]_\times R K^{-1}\mathbf{u}_1.$$

消去非零因子 λ，并将 $(K^{-1}\mathbf{u}_2)^\top = \mathbf{u}_2^\top K^{-\top}$，得

$$\mathbf{u}_2^\top \big(K^{-\top}[\bar{\mathbf{t}}]_\times R K^{-1}\big)\mathbf{u}_1 = 0.$$

由定义 $F = K^{-\top}[\bar{\mathbf{t}}]_\times R\, K^{-1}$，即

$$\mathbf{u}_2^\top F\,\mathbf{u}_1 = 0.$$

□

4 帕斯卡定理与相机内参标定

前面我们建立了射影空间到图像的射影化的映射 $\Phi : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \setminus \{\widetilde{C}\} \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$。虽然我们拍照是一个在实数域上工作的过程，但是我们接下来会在复数域上考虑问题。我们用与定义 3.6中相同的定义，将 Φ 视为 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \setminus \{\widetilde{C}\} \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$。

4.1 绝对二次曲线与绝对二次曲线的像

定义 4.1 (绝对二次曲线)**.** 在世界标架下，考虑无穷远平面 $\pi_\infty = \{[X_w; Y_w; Z_w; 0] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C})\}$（注意这是一个射影平面）。其上由方程

$$X_w^2 + Y_w^2 + Z_w^2 = 0,$$

（齐次意义下）定义了一条虚的二次曲线，称为**绝对二次曲线**，记为 Ω_∞。

引理 4.1 (绝对二次曲线的欧氏不变性)**.** 设 $[O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ 和 $[O'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3']$ 是三维欧氏空间中的两个右手直角标架，它们之间相差一个保距变换（刚体运动）。则绝对二次曲线 Ω_∞ 在这两个标架下的方程形式完全相同：

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0, \quad W = 0,$$

其中 $(X, Y, Z, W)^\top$ 是对应标架下点的齐次坐标向量。换言之，Ω_∞ 由欧氏空间的度量唯一确定，与直角坐标系的选取无关。

证明. 设空间中任意一点 P 在第一个标架下的欧氏坐标为 $\mathbf{X}=(X,Y,Z)^\top$，齐次坐标为 $\widetilde{\mathbf{X}}=[X;Y;Z;1]$。两个标架之间的保距变换可表示为

$$\mathbf{X}'=R\,\mathbf{X}+\mathbf{t},$$

其中 R 为正交矩阵且 $\det R=1$，$\mathbf{t}\in\mathbb{R}^3$ 为平移向量。延拓成的射影变换为 $[\mathbf{v}^\top]\mapsto[(\begin{pmatrix}R,\mathbf{t}\\0,1\end{pmatrix}\mathbf{v})^\top]$

绝对二次曲线 Ω_∞ 在第一个标架下的方程写为

$$\begin{cases}X^2+Y^2+Z^2=0,\\W=0.\end{cases}\tag{12}$$

这个点集为 $\{[\mathbf{d}^\top;0]\mid\mathbf{d}^\top\mathbf{d}=0,\mathbf{d}\in\mathbb{C}^3\setminus\{0\}\}$ 经过仿射变换后该点集为 $\{[(R\mathbf{d})^\top;0]\mid\mathbf{d}^\top\mathbf{d}=0,\mathbf{d}\in\mathbb{C}^3\setminus\{0\}\}$。

Ω_∞ 在第二个标架下的方程同样为

$$X'^2+Y'^2+Z'^2=0,\quad W'=0.$$

方程形式没有改变，不依赖于平移 $\mathbf{t}$ 和旋转 R。故 Ω_∞ 与直角坐标系的选取无关。 □

命题 4.1 (绝对二次曲线的像（IAC）)**.** 绝对二次曲线 Ω_∞ 在 Φ 下的像 $\Phi(\Omega_\infty)$ 是一条平面二次曲线，称为**绝对二次曲线的像**（IAC)。其方程可以用 $(KK^\top)^{-1}=K^{-\top}K^{-1}$ 表示出来，即

$$\Phi(\Omega_\infty)=\{[x;y;z]\in\mathbb{P}^2(\mathbb{C})\mid(x,y,z)(KK^\top)^{-1}(x,y,z)^\top=0\}.$$

证明. Ω_∞ 上的任意点可写为 $[\mathbf{d}^\top;0]$，其中 $\mathbf{d}\in\mathbb{C}^3$ 满足 $\mathbf{d}^\top\mathbf{d}=0$。利用 Φ 的定义，

$$\Phi([\mathbf{d}^\top;0])=[(K(R\mid\mathbf{t})\begin{pmatrix}\mathbf{d}\\0\end{pmatrix})^\top]=[(KR\,\mathbf{d})^\top].$$

于是 IAC 上的点 $[\mathbf{b}^\top]$ 满足

$$\mathbf{d}^\top\mathbf{d}=(R^\top K^{-1}\mathbf{b})^\top(R^\top K^{-1}\mathbf{b})=\mathbf{b}^\top K^{-\top}RR^\top K^{-1}\mathbf{b}=\mathbf{b}^\top(K^{-\top}K^{-1})\mathbf{b}=0.$$

□

定义 4.2. Ω_∞ 与任何空间平面的射影闭包相交于两个共轭复点，称为该平面的**圆环点**，其齐次坐标向量为 $\mathbf{I},\mathbf{J}$ ，且 $\bar{\mathbf{I}}=\mathbf{J}$。圆环点在图像上的投影称为圆环点的像，齐次坐标向量为 $\mathbf{m}_I,\mathbf{m}_J$ 它们必然位于 IAC 上，同样有 $\overline{\mathbf{m}_I}=\mathbf{m}_J$。

引理 4.2 (圆与圆环点)**.** 设 π 是三维欧氏空间中的一个平面，$\mathbf{I},\mathbf{J}$ 为该平面的一对圆环点。则 π 上的任意一个圆必然经过 $\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{J}$。

证明. 在平面 π 上建立欧氏坐标系 $(O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$，使得 O 为圆心，$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 为互相正交的单位向量。令 $\mathbf{e}_3 := \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$, 则 $(O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$，为右手直角坐标系。在此坐标系下，以圆的方程为

$$x^2 + y^2 = r^2, z = 0$$

其中 r 为半径。

$$X^2 + Y^2 = r^2W^2, Z = 0 \tag{13}$$

考察嵌入 $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{P}^3(\mathbb{C}), (x,y,z) \mapsto [x;y;z;1]$,$\pi$ 的射影闭包与 Ω_∞ 的交点为

$$[1;\sqrt{-1};0;0], [1;-\sqrt{-1};0;0],$$

满足上述方程。 □

4.2 椭圆方程拟合

设空间中一个平面圆盘（例如圆形杯盖、圆环等）在相机中成像。圆所在平面与相机的相对姿态导致投影为椭圆（避开圆平面与光轴平行的退化情形)。本小节详细说明如何从该椭圆出发，在其上选取四个实点，并通过帕斯卡定理求解圆环点的像。

提取圆轮廓的像素边缘点集（可人工或使用相应算法）, 用最小二乘法拟合椭圆的一般二次方程

$$Au^2 + Buv + Cv^2 + Du + Ev + F = 0.$$

写成齐次坐标形式：

$$\mathbf{m}^\top Q\mathbf{m} = 0, \qquad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中系数矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{pmatrix}.$$

矩阵 Q 在齐次等价意义下由椭圆唯一确定。

在拟合得到的椭圆上选取四个实点 $\mathbf{m}_A, \mathbf{m}_B, \mathbf{m}_C, \mathbf{m}_D$，选取原则为**均匀分布**——实践表明这样数值稳定性最优。推荐方法如下：

1. 计算椭圆的中心坐标 (u_c, v_c)、长轴方向角 θ、长短半轴 a, b。

2. 在椭圆的参数方程下，取四个等分象限的角度：

$$\theta_k = \theta + k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

3. 将角度代入椭圆参数方程

$$\begin{cases} u_k = u_c + a\cos\theta_k\cos\theta - b\sin\theta_k\sin\theta, \\ v_k = v_c + a\cos\theta_k\sin\theta + b\sin\theta_k\cos\theta, \end{cases}$$

得到四个实点的像素坐标 $[u_k; v_k; 1]$，记为 $\mathbf{m}_A, \mathbf{m}_B, \mathbf{m}_C, \mathbf{m}_D$。

这四个点构成椭圆上的一个内接四边形，它们与两个待求的圆环点像 $\mathbf{m}_I, \mathbf{m}_J$ 一起构成椭圆上的六个点。

引理 4.3 (圆环点像的有限性条件)**.** 设相机内参矩阵为 K, 相机外参为 $(R, \mathbf{t})$, 世界坐标系中一空间平面 π 的法向量为 $\mathbf{n}$。记相机光轴方向(世界坐标系下)为 $\mathbf{v} = (r_{31}, r_{32}, r_{33})^\top$, 其中 r_{3j} 为旋转矩阵 R 的第三行元素。若 $\mathbf{v}$ 不垂直于平面 π（即 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \neq 0$），则平面 π 的圆环点 $\mathbf{I}_\pi, \mathbf{J}_\pi$ 在图像上的投影 $\mathbf{m}_I, \mathbf{m}_J$ 为有限远点，即其齐次坐标的第三个分量非零。

证明. 平面 π 的圆环点 $\mathbf{I}_\pi, \mathbf{J}_\pi$ 是 π 的无穷远直线上的两个虚点，其齐次坐标可写为 $[\mathbf{d}; 0]^\top$，其中 $\mathbf{d} \in \mathbb{C}^3$ 满足

$$\mathbf{d}^\top\mathbf{d} = 0, \qquad \mathbf{d}^\top\mathbf{n} = 0. \tag{14}$$

第一个条件表明 $\mathbf{d}$ 是一个迷向向量（零模长），第二个条件表示 $\mathbf{d}$ 位于平面 π 内。

相机的投影矩阵为 $\mathtt{P} = K(R \mid \mathbf{t})$，圆环点的像的齐次坐标向量为 $K[R \mid \mathbf{t}]\begin{pmatrix}\mathbf{d}\\0\end{pmatrix} = KR\,\mathbf{d}$. 其第三个分量即为：

$$(R\,\mathbf{d})_3 = \mathbf{r}_3^\top\mathbf{d} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{d}, \tag{15}$$

其中 $\mathbf{r}_3^\top$ 为 R 的第三行，按定义等于 $\mathbf{v}^\top$。 □

4.3 帕斯卡定理求解圆环点的像

$\mathbf{m}_A, \mathbf{m}_B, \mathbf{m}_C, \mathbf{m}_D, \mathbf{m}_I, \mathbf{m}_J$, 构成一个虚六边形。由于六点均位于同一条二次曲线（椭圆）上，帕斯卡定理成立：三对对边的交点共线。

三对对边的对偶点齐次坐标向量可以由下式计算

$$\begin{aligned} L_1 &= \mathbf{m}_A \times \mathbf{m}_B, & L_2 &= \mathbf{m}_B \times \mathbf{m}_C, & L_3 &= \mathbf{m}_C \times \mathbf{m}_D, \\ L_4 &= \mathbf{m}_D \times \mathbf{m}_I, & L_5 &= \mathbf{m}_I \times \mathbf{m}_J, & L_6 &= \mathbf{m}_J \times \mathbf{m}_A. \end{aligned}$$

三对边为 (L_1, L_4)、(L_2, L_5)、(L_3, L_6)，对应交点齐次坐标向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= L_1 \times L_4 = (\mathbf{m}_A \times \mathbf{m}_B) \times (\mathbf{m}_D \times \mathbf{m}_I), \\ \mathbf{Q} &= L_2 \times L_5 = (\mathbf{m}_B \times \mathbf{m}_C) \times (\mathbf{m}_I \times \mathbf{m}_J), \\ \mathbf{R} &= L_3 \times L_6 = (\mathbf{m}_C \times \mathbf{m}_D) \times (\mathbf{m}_J \times \mathbf{m}_A). \end{aligned}$$

帕斯卡定理断言它们共线：

$$\det(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}) = 0. \tag{16}$$

圆环点的像是一对共轭复点，设

$$\mathbf{m}_I = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 i \\ x_3 + x_4 i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{m}_J = \overline{\mathbf{m}_I} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 i \\ x_3 - x_4 i \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ 为待求的四个实未知数。将它们及四个已知实点的坐标代入 (16)，得到一个复数方程。其实部和虚部分别为零：

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\big(\det(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})\big) = 0, \\ \mathrm{Im}\big(\det(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})\big) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

椭圆约束： 圆环点的像必须位于已拟合的椭圆上，即

$$\mathbf{m}_I^\top Q \, \mathbf{m}_I = 0,$$

同样分解为实部和虚部：

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\big(\mathbf{m}_I^\top Q \, \mathbf{m}_I\big) = 0, \\ \mathrm{Im}\big(\mathbf{m}_I^\top Q \, \mathbf{m}_I\big) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

（$\mathbf{m}_J$ 的条件自动满足，因为 C 为实矩阵且 $\mathbf{m}_J = \overline{\mathbf{m}_I}$。）

(17) 提供 2 个实方程，(18) 提供 2 个实方程，合计 4 个实方程，恰好可以确定 4 个实未知数 x_1, x_2, x_3, x_4。

4.4 由圆环点的像求解内参

设已从第 i 张图像（$i = 1, \ldots, n$，$n \geq 2$）中求得一对圆环点的像 $\mathbf{m}_{Ii}$ 和 $\mathbf{m}_{Ji}$，它们是一对共轭复点：

$$\mathbf{m}_{Ii} = \begin{bmatrix} x_{1i} + x_{2i}\mathrm{i} \\ x_{3i} + x_{4i}\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{m}_{Ji} = \begin{bmatrix} x_{1i} - x_{2i}\mathrm{i} \\ x_{3i} - x_{4i}\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

绝对二次曲线的像记为 $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{K}^{-\mathsf{T}}\mathbf{K}^{-1}$，它是一个 3×3 的实对称矩阵。对于任意一对圆环点的像，满足

$$\mathbf{m}_{Ii}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\omega} \mathbf{m}_{Ii} = 0.$$

由于 $\mathbf{m}_{Ii}$ 为复点，该方程等价于其实部和虚部分别为零：

$$\mathrm{Re}\left(\mathbf{m}_{Ii}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\omega} \mathbf{m}_{Ii}\right) = 0, \qquad \mathrm{Im}\left(\mathbf{m}_{Ii}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\omega} \mathbf{m}_{Ii}\right) = 0.$$

每一对圆环点像提供关于 $\boldsymbol{\omega}$ 的 **2 个线性约束**。$\boldsymbol{\omega}$ 有 4 个自由度。因此至少需要 $n \geq 2$ 张不同姿态的图像才能线性求解。具体来说：

$$\mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{f_u} & 0 & -\frac{u_0}{f_u} \\ 0 & \frac{1}{f_v} & -\frac{v_0}{f_v} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

绝对二次曲线的像 $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{K}^{-\top}\mathbf{K}^{-1}$ 为：

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \frac{1}{f_u^2} & 0 & -\frac{u_0}{f_u^2} \\ 0 & \frac{1}{f_v^2} & -\frac{v_0}{f_v^2} \\ -\frac{u_0}{f_u^2} & -\frac{v_0}{f_v^2} & 1 + \frac{u_0^2}{f_u^2} + \frac{v_0^2}{f_v^2} \end{bmatrix}$$

记

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} a & 0 & d \\ 0 & b & e \\ d & e & 1 + \dfrac{d^2}{a} + \dfrac{e^2}{b} \end{bmatrix}$$

则相机内参数可直接由下式求得：

$$f_u = \frac{1}{\sqrt{a}}, \qquad f_v = \frac{1}{\sqrt{b}}, \qquad u_0 = -\frac{d}{a}, \qquad v_0 = -\frac{e}{b}.$$