

射影空间

1 从仿射直线到射影直线

在仿射平面中，两条平行直线永不相交；在仿射直线上，函数可以无界地增长。这些现象提示我们，仿射空间缺少了某些“无穷远处”的点。为了统一处理平行与相交的情形，并使空间具备更好的紧致性，我们首先从一维情形——射影直线——入手。

具体地，对于实数轴 $\mathbb{R}$ ，我们引入一个理想点 ∞ ，称为无穷远点。于是得到扩充实数集 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ （实际上，这是把 $+\infty$ 和 $-\infty$ 看成一个点）。在几何上，这相当于把直线两端连接起来，形成一个封闭的圆。我们将在后面看到这一直观的严格实现。

1.1 射影直线的模空间定义

射影直线的严格定义不依赖于直观的“添加无穷远点”，而是从一维线性子空间的角度给出，这一观点适用于任意域。

定义 1.1. 设 $\mathbb{F}$ 是一个域。在二维向量空间 $\mathbb{F}^2$ 中，考虑所有一维线性子空间（即过原点的直线）。这些子空间的集合称为 $\mathbb{F}$ 上的**射影直线**，记作 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})$ 。等价地，

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{F}) = (\mathbb{F}^2 \setminus \{0\}) / \sim,$$

其中 $(x_0, x_1) \sim (\lambda x_0, \lambda x_1)$ 对任意非零 $\lambda \in \mathbb{F}$ 。点用**齐次坐标** $[x_0 : x_1]$ 表示。

这一定义的优越性在于：它将“方向”而非具体数值作为基本对象。例如在实数域上， $\mathbb{R}^2$ 中每条过原点的直线对应一个方向，这些方向构成一个圆——这正是我们即将看到的几何模型。

齐次坐标 $[x_0 : x_1]$ 与通常的域中元素有一个自然的对应关系。当 $x_1 \neq 0$ 时，我们可以将点写成 $[x : 1]$ ，其中 $x = x_0/x_1 \in \mathbb{F}$ 。这给出了一个单射

$$\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{F}), \quad x \mapsto [x : 1].$$

它的像集是 $U_0 = \{[x_0 : x_1] \mid x_1 \neq 0\}$ 。余下的点集是 U_0 的补集，即 $\{[x_0 : 0] \mid x_0 \neq 0\}$ ，这只有一个点，记作 $\infty = [1 : 0]$ 。因此，作为集合，

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{F}) = \mathbb{F} \cup \{\infty\}.$$

类似地，若用另一个坐标卡 $x_0 \neq 0$ ，则点可写成 $[1 : y]$ ，其中 $y = x_1/x_0$ ，此时 $U_1 = \{[x_0 : x_1] \mid x_0 \neq 0\}$ 与 $\mathbb{F}$ 一一对应，且 $\infty = [0 : 1]$ 也被排除在 U_1 外。这表明“无穷远点”的概念依赖于坐标选取，而非本质的。

1.2 射影直线的局部仿射结构

对于任意域 $\mathbb{F}$ ，射影直线 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})$ 在局部上可以与仿射直线等同。具体地，我们有两个自然的子集（称为**仿射坐标卡**）：

$$U_0 = \{[x_0 : x_1] \mid x_1 \neq 0\}, \quad U_1 = \{[x_0 : x_1] \mid x_0 \neq 0\}.$$

- U_0 与域 $\mathbb{F}$ 之间存在一一对应 $\varphi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{F}$ ，定义为 $\varphi_0([x_0 : x_1]) = x_0/x_1$ ，其逆映射为 $t \mapsto [t : 1]$ 。
- U_1 与 $\mathbb{F}$ 之间存在一一对应 $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{F}$ ，定义为 $\varphi_1([x_0 : x_1]) = x_1/x_0$ ，其逆映射为 $s \mapsto [1 : s]$ 。

通过这两个对应，我们可以将 $\mathbb{F}$ 上的仿射空间结构（即 $\mathbb{F}$ 作为一维向量空间上的仿射空间）搬到 U_0 和 U_1 上，使它们分别成为与仿射直线 $\mathbb{F}$ 同构的仿射空间。换句话说， U_0 和 U_1 都具有自然的仿射直线结构。

两个坐标卡覆盖整个射影直线，因为任何点至少有一个坐标非零。它们的交集 $U_0 \cap U_1$ 对应于 $\mathbb{F}^\times = \mathbb{F} \setminus \{0\}$ ，在此交集上，坐标变换为

$$s = \frac{1}{t},$$

其中 $t = x_0/x_1 \in \mathbb{F}^\times$ ， $s = x_1/x_0$ 。这是一个从 $\mathbb{F}^\times$ 到自身的双射。

1.3 射影直线作为仿射直线的“一点紧化”

射影直线最重要的性质之一是：去掉任意一个点后，剩下的部分恰好同构于仿射直线。这正是“添加一个无穷远点”这一直观的精确定义。

定理 1.1. 设 $\mathbb{F}$ 是任意域， P 是 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})$ 中任意一点。则存在一个双射 $\Psi_P : \mathbb{P}^1(\mathbb{F}) \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{F}$ 。

证明. 我们分两种情形证明。

情形 1: $P = [1 : 0]$ 或者 $[0 : 1]$ 。此时由前面的讨论， $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}) \setminus \{P\} = U_0$ 或 U_1 ，因此结论成立。

情形 2: $P = [a : b]$ 且 $b \neq 0$ 。考虑由矩阵

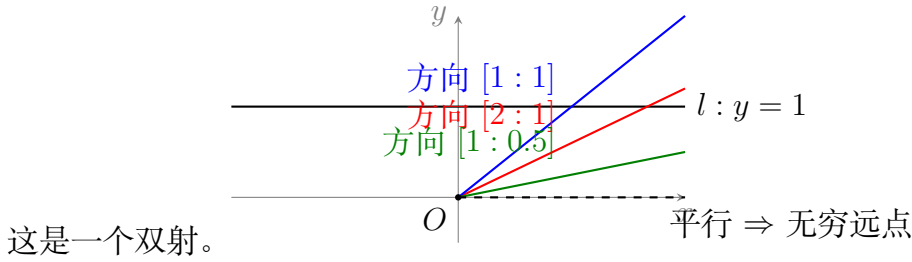
$$T = \begin{pmatrix} b & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

诱导的映射 $\tilde{T} : \mathbb{F}^2 \rightarrow \mathbb{F}^2$ ，它是可逆线性变换（因为 $\det T = b \neq 0$ ）。此变换诱导射影直线上的一个**射影变换**（我们将在后续详细讨论），即

$$\Phi_T : \mathbb{P}^1(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{F}), \quad [x_0 : x_1] \mapsto [bx_0 - ax_1 : x_1].$$

容易验证 $\Phi_T(P) = [b \cdot a - a \cdot b : b] = [0 : b] = [0 : 1] = \infty$ （注意 $[0 : b]$ 与 $[0 : 1]$ 相同）。由于 Φ_T 是双射（因为 T 可逆），它将 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}) \setminus \{P\}$ 双射地映到 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}) \setminus \{\infty\} = U_0$ 。然后复合 φ_0 即得

$$\Psi_P = \varphi_0 \circ \Phi_T : \mathbb{P}^1(\mathbb{F}) \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{F},$$



□

这个定理表明，射影直线上没有特殊的点，任何一点都可以被视为“无穷远点”。

1.4 实射影直线的几何模型：圆

现在考虑实数域上的射影直线 $\mathbb{RP}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ 。我们来建立它与单位圆 $S^1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 = 1\}$ 之间的联系。

命题 1.1. 存在一个从 $\mathbb{RP}^1$ 到单位圆 S^1 的一一对应，且这个对应及其逆映射都是连续的（在通常的欧氏拓扑意义下）。

证明. 取映射 $\Phi : \mathbb{RP}^1 \rightarrow S^1$ 定义为：

$$\Phi([x_0 : x_1]) = \left(\frac{2x_0x_1}{x_0^2 + x_1^2}, \frac{x_0^2 - x_1^2}{x_0^2 + x_1^2} \right).$$

这是一个常见的有理参数化，它将射影直线上的点映到圆上。验证：当 $(x_0, x_1) \neq (0, 0)$ 时，右端两坐标的平方和为 1，且依赖于比例类。不难验证 Φ 是双射：每个方向 $[x_0 : x_1]$ 对应圆上唯一一点，且圆上每点可逆地找到对应的方向（可具体解出 $[x_0 : x_1]$ ）。同时， Φ 是连续的，因为它是坐标的有理函数且分母非零。其逆映射也可用连续函数表达，因此也是连续的。 □

实际上，更直观的方式是用角度 θ ：每个方向 $[x_0 : x_1]$ 可视为与 x 轴正方向的夹角 θ ，即 $x_0 = \cos \theta$, $x_1 = \sin \theta$ （允许整体缩放）。由于 $[x_0 : x_1]$ 与 $[-x_0 : -x_1]$ 相同， θ 与 $\theta + \pi$ 对应同一点，因此 $\mathbb{RP}^1$ 可以看作将圆上的对径点等同，这仍然是一个圆（旋转半圈后重合）。无论如何，存在一个双连续的双射将 $\mathbb{RP}^1$ 与圆等同起来。

既然 $\mathbb{RP}^1$ 与圆 S^1 之间存在一一对应的连续映射且逆连续, 那么在几何意义上, 它们就是“相同的空间”。我们知道圆是 $\mathbb{R}^2$ 中的有界闭集, 从而是**紧致**的 (即它的任何开覆盖都有有限子覆盖)。因此, $\mathbb{RP}^1$ 也具有紧致性。这一紧致性使得 $\mathbb{RP}^1$ 上的连续函数必有界, 这与仿射直线形成鲜明对比。

例 1.1 (例子: 复射影直线). 若取域 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, 则 $\mathbb{CP}^1$ 是复一维的, 但作为实流形是二维的。类似地, $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 它可以通过球极投影与二维球面 S^2 建立双连续的一一对应, 即**黎曼球面**。这是复分析中最基本的一维紧复流形, 其上的亚纯函数正是复平面上的有理函数。

2 射影空间的线性代数结构

在第一节中, 我们以一维射影直线为例, 引入了射影空间的基本思想。现在我们将这些概念推广到任意维数, 建立射影空间的代数框架。

2.1 射影空间的定义与齐次坐标

仿照射影直线的定义, 我们自然地将射影空间定义为更高维向量空间中一维子空间的集合。

定义 2.1. 设 $\mathbb{F}$ 是一个域, n 为非负整数。在 $(n+1)$ 维向量空间 $\mathbb{F}^{n+1}$ 中, 考虑所有一维线性子空间 (即过原点的直线)。这些子空间的集合称为 $\mathbb{F}$ 上的 n 维**射影空间**, 记作 $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 。等价地,

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{F}) = (\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim,$$

其中 $(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ 对任意非零 $\lambda \in \mathbb{F}$ 。点用**齐次坐标** $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ 表示。

当 $n = 1$ 时, 即前一节的射影直线; 当 $n = 2$ 时, 称为射影平面。

齐次坐标的重要性质是它们不是唯一的, 但彼此成比例。因此, 对于点 $P = [x_0 : \dots : x_n]$, 只要存在某个坐标非零, 我们就可以通过除以该坐标将其归一化, 从而得到仿射坐标。

2.2 局部仿射坐标卡

类似于一维情形, 射影空间可以用多个仿射坐标卡覆盖, 每个坐标卡都同构于仿射空间 $\mathbb{F}^n$ 。

对于每个 $i = 0, \dots, n$, 定义

$$U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\}.$$

则 U_i 与 $\mathbb{F}^n$ 之间存在一一对应:

$$\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{F}^n, \quad [x_0: \cdots: x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right),$$

其中 $\frac{\widehat{x_i}}{x_i}$ 表示省略这一项。其逆映射为

$$\psi_i(t_1, \dots, t_n) = [t_1: \cdots: t_{i-1}: 1: t_i: \cdots: t_n],$$

即在第 i 个位置放 1, 其余坐标由 t_j 给出。

这些 U_i 覆盖整个 $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$, 称为**仿射坐标卡**。当点 P 同时属于两个不同的坐标卡 U_i 和 U_j 时, 它在 U_i 中的坐标 $(t_1, \dots, t_n)$ 与在 U_j 中的坐标 $(s_1, \dots, s_n)$ 之间存在确定的变换关系, 称为**坐标变换**。这一变换可以通过将两个坐标都还原为同一组齐次坐标来得到。

设点 $P \in U_i \cap U_j$ 在 U_i 中的坐标为 $(t_1, \dots, t_n)$, 在 U_j 中的坐标为 $(s_1, \dots, s_n)$ 。由定义, 它们对应的齐次坐标分别为

$$P = [t_1: \cdots: t_{i-1}: 1: t_i: \cdots: t_n], \quad P = [s_1: \cdots: s_{j-1}: 1: s_j: \cdots: s_n].$$

因此存在非零标量 $\lambda \in \mathbb{F}^\times$ 使得

$$(t_1, \dots, t_{i-1}, 1, t_i, \dots, t_n) = \lambda (s_1, \dots, s_{j-1}, 1, s_j, \dots, s_n). \quad (1)$$

为用 $(t_1, \dots, t_n)$ 表示 $(s_1, \dots, s_n)$, 记左边向量的第 m 个分量为 L_m ($1 \leq m \leq n+1$), 即

$$L_m = \begin{cases} t_m, & 1 \leq m < i, \\ 1, & m = i, \\ t_{m-1}, & i < m \leq n+1. \end{cases}$$

比较 (1) 式两边的第 j 个分量得 $\lambda = L_j$ (因为右边第 j 个分量为 $\lambda \cdot 1$)。由于 $P \in U_j$, 有 $x_j \neq 0$, 从而 $L_j \neq 0$, 分母合理。于是由 (1) 式得

$$\lambda s_k = L_k \quad (1 \leq k < j), \quad \lambda s_{k-1} = L_k \quad (j < k \leq n+1).$$

将 $\lambda = L_j$ 代入, 解得

$$s_k = \frac{L_k}{L_j}, \quad 1 \leq k < j,$$

$$s_k = \frac{L_{k+1}}{L_j}, \quad j \leq k \leq n.$$

此即从 U_i 到 U_j 的坐标变换公式。

2.3 射影子空间：点、直线、平面、超平面

在射影空间中，我们可以自然地定义“直线”、“平面”等概念，它们对应于原向量空间中的线性子空间。

定义 2.2. 设 $W \subseteq \mathbb{F}^{n+1}$ 是一个 $r+1$ 维线性子空间 ($0 \leq r \leq n$)。则 W 中所有一维子空间的集合

$$\mathbb{P}(W) = \{[x_0 : \cdots : x_n] \mid (x_0, \dots, x_n) \in W \setminus \{0\}\} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{F})$$

称为 $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 中的一个 r 维射影子空间。根据维数 r 的不同，我们有不同的称谓：

- 当 $r = 0$ 时，它是一个点（零维射影子空间）。
- 当 $r = 1$ 时，它是一条射影直线。
- 当 $r = 2$ 时，它是一个射影平面。
- 当 $r = n - 1$ 时，它称为一个超平面。

定理 2.1 (射影子空间的维数公式). 设 $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 是 n 维射影空间， U 和 V 是其中的射影子空间，维数分别为 m 和 l ($0 \leq m, l \leq n$)。当 $m + l - n \geq 0$ 时，则它们的交集 $U \cap V$ 是一个非空射影子空间，且其维数满足

$$\dim(U \cap V) \geq m + l - n.$$

证明. 设 $U = \mathbb{P}(W_U)$, $V = \mathbb{P}(W_V)$, 其中 $W_U, W_V \subseteq \mathbb{F}^{n+1}$ 分别是维数为 $m+1$ 和 $l+1$ 的线性子空间。则 $U \cap V = \mathbb{P}(W_U \cap W_V)$ 。由线性子空间的维数公式：

$$\dim(W_U) + \dim(W_V) = \dim(W_U + W_V) + \dim(W_U \cap W_V).$$

注意到 $W_U + W_V \subseteq \mathbb{F}^{n+1}$, 故 $\dim(W_U + W_V) \leq n+1$ 。于是

$$\dim(W_U \cap W_V) = \dim(W_U) + \dim(W_V) - \dim(W_U + W_V) \geq (m+1) + (l+1) - (n+1) = m + l + 1 - n.$$

因此

$$\dim(U \cap V) = \dim(W_U \cap W_V) - 1 \geq m + l - n.$$

若 $m + l - n \geq 0$, 则右端非负, 从而 $U \cap V$ 至少含有 0 维子空间, 即非空。□

推论 2.1.1 (射影平面上的两条直线). 在射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{F})$ 中, 任意两条不同的直线总相交于一点。

证明. 在 $\mathbb{P}^2$ 中, 直线是一维射影子空间, 即 $m = l = 1$ 。由定理, 它们的交的维数满足

$$\dim(U \cap V) \geq 1 + 1 - 2 = 0,$$

故 $U \cap V$ 至少是一个点。若两条直线不同, 则它们对应的二维线性子空间 W_U 和 W_V 不相等, $\dim(W_U \cap W_V) \leq 1$, 从而 $\dim(U \cap V) = 0$, 即恰好是一个点。因此任意两条不同直线有唯一交点。□

定理 2.2. 设 $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 是射影空间中的点, 齐次坐标分别为

$$P_i = [x_0^{(i)} : x_1^{(i)} : \dots : x_n^{(i)}], \quad i = 1, \dots, r.$$

构造矩阵

$$M = \begin{pmatrix} x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & \cdots & x_n^{(1)} \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{(r)} & x_1^{(r)} & \cdots & x_n^{(r)} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{r \times (n+1)}.$$

则由定义得到, 点 $P_1, \dots, P_r$ 落在某个 m 维射影子空间中的充要条件是

$$\text{rank } M \leq m + 1.$$

证明. 由定义显然. □

我们接下来会看到, 射影子空间限制到仿射开子集后会是仿射子空间, 同时仿射子空间取射影闭包后是射影子空间, 从而我们可以用射影几何的办法来研究仿射空间中的共线共面等问题。

定理 2.3. 设 $S \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 是一个 m 维射影子空间 (即 $S = \mathbb{P}(W)$, 其中 $W \subseteq \mathbb{F}^{n+1}$ 是 $m+1$ 维线性子空间)。若 $S \cap U_i \neq \emptyset$, 则 $\varphi_i(S \cap U_i)$ 是 $\mathbb{F}^n$ 中的一个 m 维仿射子空间。

证明. 设 W 是 $\mathbb{F}^{n+1}$ 中 $m+1$ 维子空间, $S = \mathbb{P}(W)$ 。由于 $S \cap U_i \neq \emptyset$, 存在点 $[x] \in S$ 使得 $x_i \neq 0$ 。那么所有满足 $x_i \neq 0$ 的 $[x] \in S$ 构成 S 中一个子集, 其像在 φ_i 下为

$$\varphi_i(S \cap U_i) = \left\{ \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \mid [x_0 : \dots : x_n] \in S, x_i \neq 0 \right\}.$$

令 $W_1 = \{\mathbf{x} \in W \mid x_i = 1\}$ 。这是一个仿射子空间 (如果非空), 其维数为 m (因为 W 是 $m+1$ 维, 超平面 $x_i = 1$ 是 n 维仿射子空间, 且不平行于 W 时交为 m 维)。由于 $S \cap U_i$ 中的点一一对应到 W_1 (因为每个点有唯一的代表元使 $x_i = 1$)。因此 $\varphi_i(S \cap U_i)$ 是 W_1 在线性映射下 $(x_0, \dots, x_i, \dots, x_n) \mapsto (x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n)$ 的像, 而 W_1 是仿射子空间, 其像也是仿射子空间 (线性映射保持仿射结构), 且维数不超过 m 。由于映射是单射 (因为 W_1 中的点由其余坐标唯一确定), 像的维数等于 m 。故 $\varphi_i(S \cap U_i)$ 是 $\mathbb{F}^n$ 中一个 m 维仿射子空间。 □

定义 2.3. 设 $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 是 n 维射影空间, $S \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 为任意子集。我们称包含 S 的**最小射影子空间**为 S 的**(线性)射影闭包**。具体的, 为下述集合

$$\bigcap \{L \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{F}) \mid L \text{ 是射影子空间且 } S \subseteq L\} = \mathbb{P}(\text{span}\{\mathbf{v} \in \mathbb{F}^{n+1} \mid [\mathbf{v}] \in S\}).$$

命题 2.1. (仿射子空间的射影闭包) 设 $A = \mathbf{p} + V$ 是 $\mathbb{F}^n$ 中的一个 m 维仿射子空间, 其中 $V \subseteq \mathbb{F}^n$ 是 m 维线性子空间, $\mathbf{p} \in \mathbb{F}^n$ 。考虑 $\mathbb{F}^{n+1}$ 中的子集

$$W = \{(\mathbf{p}t + \mathbf{v}, t) \mid t \in \mathbb{F}, \mathbf{v} \in V\}.$$

则 W 是 $\mathbb{F}^{n+1}$ 的一个 $m+1$ 维线性子空间。并且, 通过考察嵌入 $\phi_{n+1}: \mathbb{F}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{F})$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \dots : x_n : 1]$, 有 $\phi_{n+1}(A) = \mathbb{P}(W) \cap U_{n+1}$, 其中 $U_{n+1} = \{[x_1 : \dots : x_n : x_{n+1}] \mid x_{n+1} \neq 0\}$ 。那么 $\mathbb{P}(W)$ 是 $\phi_{n+1}(A)$ 的射影闭包。

证明. 由于

$$\begin{aligned} & \text{span}\{\mathbf{y} \in \mathbb{F}^{n+1} \mid [\mathbf{y}] = \phi_{n+1}(\mathbf{x}), \mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{v}, \mathbf{v} \in V\} \\ &= \text{span}\{\mathbf{y} = t(\mathbf{p} + \mathbf{v}, 1) \in \mathbb{F}^{n+1} \mid t \in \mathbb{F}^\times, \mathbf{v} \in V\} \\ &= \text{span}\{\mathbf{y} = (\mathbf{p} + \mathbf{v}, t) \in \mathbb{F}^{n+1} \mid t \in \mathbb{F}^\times, \mathbf{v} \in V\} = W, \end{aligned}$$

$\mathbb{P}(W)$ 即为 A 的射影闭包。 □

推论 2.3.1. 设 $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{F}^n$ 是 r 个点, 记它们的坐标为 $P_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$ 。构造矩阵

$$M = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \cdots & x_{rn} & 1 \end{pmatrix}.$$

则这 r 个点落在某个 m 维仿射子空间中的充要条件是 $\text{rank } M \leq m+1$ 。

证明. 将仿射空间 $\mathbb{F}^n$ 通过映射

$$\iota: \mathbb{F}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{F}), \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \dots : x_n : 1]$$

嵌入到射影空间的仿射坐标卡 $U_{n+1} = \{[x_1 : \dots : x_n : x_{n+1}] \mid x_{n+1} \neq 0\}$ 中。记 $\iota(P_i) = [x_{i1} : \dots : x_{in} : 1]$, 其对应的齐次坐标向量为 $\mathbf{v}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in}, 1) \in \mathbb{F}^{n+1}$ 。设 $V = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$, 则 $\dim V = \text{rank } M$ 。

必要性: 设 $P_1, \dots, P_r$ 落在某个 m 维仿射子空间 $A \subseteq \mathbb{F}^n$ 中。由命题 2.1, 存在一个 $m+1$ 维线性子空间 $W \subseteq \mathbb{F}^{n+1}$, 使得 $\iota(A) = \mathbb{P}(W) \cap U_{n+1}$, 且 $\mathbf{v}_i \in W$ 。于是 $V \subseteq W$, 故 $\dim V \leq \dim W = m+1$, 即 $\text{rank } M \leq m+1$ 。

充分性: 假设 $\text{rank } M = \dim V \leq m+1$ 。由于每个 $\mathbf{v}_i$ 的最后一个分量为 1, 因此射影子空间 $S = \mathbb{P}(V)$ 与 U_{n+1} 的交非空。由定理 (射影子空间与仿射坐标卡的交是仿射子空间), $S \cap U_{n+1}$ 是一个仿射子空间, 其维数为 $\dim V - 1 \leq m$ 。 □

2.4 齐次线性方程和对偶原理

命题 2.2. 任意一个超平面 $H \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 可以由一个非零齐次线性方程

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0, \quad (a_0, \dots, a_n) \neq 0$$

的零点集给出。反之, 任何这样的方程定义了一个超平面。

更一般地, 任意 k 维射影子空间可以由 $n - k$ 个线性无关的齐次线性方程联立定义:

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{n-k,0}x_0 + a_{n-k,1}x_1 + \cdots + a_{n-k,n}x_n = 0, \end{cases}$$

其中系数矩阵的秩为 $n - k$ 。这组方程的解空间 (作为 $\mathbb{F}^{n+1}$ 的子空间) 的维数为 $k + 1$, 对应射影子空间的维数为 k 。由前面射影闭包的定义, 我们可以得到如下结果

定理 2.4. 设 $A \subseteq \mathbb{F}^n$ 是一个 d 维仿射子空间。则 A 可由一组仿射线性方程描述:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases}$$

其中 $k = n - d$, 且系数矩阵 (a_{ij}) 的秩为 k 。考虑嵌入 $\mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{F}), (x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \cdots : x_n : 1]$ 。那么 A 的射影闭包为

$$\{[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] \mid a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n - b_i x_{n+1} = 0, \quad i = 1, \dots, k\}$$

注意到对于定义 k 维射影子空间的齐次线性方程的系数, 固定一个 i , 将 $a_{i,0}, \dots, a_{i,n}$ 换成 $ka_{i,0}, \dots, ka_{i,n}$ 这里 $(k \in \mathbb{F}^\times)$, 不改变齐次方程的解, 因此实际上一个 k 维射影子空间可以由 $n - k$ 个齐次坐标 $\{[a_{i,0}; \dots; a_{i,n}] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{F}) \mid i = 1, \dots, n - k\}$ 确定。这启发我们定义所谓的对偶射影子空间:

定义 2.4. 设 $S \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 是一个 k 维射影子空间。即

$$S = \{[\mathbf{x}] \mid \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} = 0, i = 1, \dots, n - k\}$$

其中 $\mathbf{a}_i = (a_{i0}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ 是行向量, $\mathbf{x}$ 是列向量, 且系数矩阵的秩为 $n - k$ 。 $[\mathbf{a}_i]$ 张成的射影子空间

$$S^* := \mathbb{P}(\text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-k}\}) \subseteq \mathbb{P}^n$$

称为 S 的**对偶子空间**。由于 $\text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-k}\} = \{\mathbf{a} \in \mathbb{F}^{n+1} \mid \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0, \forall [\mathbf{x}] \in S\}$, S^* 的定义与方程组的选取无关, 且 $\dim S^* + \dim S = n - 1$ 。特别的, 超平面和点互为对偶。

定理 2.5 (对偶条件). 设 $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{P}^n$ 是 m 个点。则它们落在某个 r 维射影子空间中的充分必要条件是: 它们对应的对偶超平面 $P_1^*, \dots, P_m^* \subset \mathbb{P}^n$ 的交集的维数大于等于 $n - r - 1$ 。

证明. 在 $\mathbb{F}^{n+1}$ 中取坐标向量. 设 P_i 的齐次坐标向量为 $\mathbf{v}_i \in \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$. 点 P_i 落在某个 r 维射影子空间 S 中当且仅当 $\dim \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} \leq r+1$.

P_i^* 对应于超平面 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^{n+1} \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_i = 0\}$ 的射影化. 注意到

$$\bigcap P_i^* = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^m \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_i = 0\}\right) = \mathbb{P}(\text{Ker}(\psi)).$$

这里 ψ 为映射

$$\mathbb{F}^{n+1} \rightarrow \mathbb{F}^m, \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_m)$$

其像空间的维数为矩阵 $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ 的行向量的秩, 这也等于列向量的秩. 因此 $\dim \bigcap P_i^* = \dim \text{Ker}(\psi) - 1 = n - \dim \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$. $\square$

例 2.1. 在射影平面 $\mathbb{P}^2$ 中, $n = 2$. 三点共线 ($r = 1$) 当且仅当它们对应的对偶直线 P_1^*, P_2^*, P_3^* 共点 ($n - r - 1 = 0$), 这正是点线对偶的经典结论.

2.5 局部仿射结构的抽象证明

超平面 H 对应于 $\mathbb{F}^{n+1}$ 中的一个 n 维线性子空间 W , 即 $H = \mathbb{P}(W)$. 令 $A = \mathbb{P}^n(\mathbb{F}) \setminus H$. 我们将要证明 A 是一个仿射空间. 取一个不在 H 上的点, 即选一个向量 $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{F}^{n+1} \setminus W$. 则任意点 $P \in A$ 可以唯一地表示为

$$P = [\mathbf{v}_0 + \mathbf{w}], \quad \mathbf{w} \in W.$$

这是因为:

- 若 $P = [\mathbf{x}]$, 由于 $\mathbf{x} \notin W$, 可将 $\mathbf{x}$ 分解为 $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{v}_0 + \mathbf{w}$, 其中 $\lambda \neq 0$, $\mathbf{w} \in W$. 再通过缩放齐次坐标, 令 $\lambda = 1$, 即得 $\mathbf{x} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{w}$, 且 $\mathbf{w}$ 唯一.
- 反之, 任何 $\mathbf{w} \in W$ 给出点 $[\mathbf{v}_0 + \mathbf{w}]$, 且该点不在 H 中 (因为 $\mathbf{v}_0 + \mathbf{w} \notin W$).

因此, 映射

$$\psi : A \longrightarrow W, \quad [\mathbf{v}_0 + \mathbf{w}] \longmapsto \mathbf{w}$$

是一个双射.

通过 Φ 将 W 上的向量空间结构拉回 A : 定义 A 上的加法为

$$P + \mathbf{w} := \psi^{-1}(\psi(P) + \mathbf{w}), \quad P \in A, \mathbf{w} \in W.$$

由于 Φ 是双射, 直接验证可知公理成立:

- $P + \mathbf{0} = P$;
- $(P + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = P + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$;
- 对任意 $P, Q \in A$, 唯一的 $\mathbf{w} = \Phi(Q) - \Phi(P)$ 满足 $Q = P + \mathbf{w}$.

因此 A 是以 W 为伴随向量空间的仿射空间。

上述构造中，向量空间 W 就是超平面 H 的方向子空间（即 H 对应的线性子空间）。选定的点 $[\mathbf{v}_0]$ 可以视为仿射空间 A 中的一个原点，但仿射空间本身不依赖于原点的选择。

3 射影变换

3.1 射影变换

射影变换是射影几何的核心概念，它由向量空间上的可逆线性映射诱导。

定义 3.1. 设 $T \in \text{GL}(n+1, \mathbb{F})$ 是 $\mathbb{F}^{n+1}$ 上的可逆线性变换。则 T 诱导一个映射

$$\Phi_T : \mathbb{P}^n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{F}), \quad [x_0 : \cdots : x_n] \mapsto [(x_0, \dots, x_n)T].$$

由于 T 可逆且将非零向量映为非零向量，且与标量乘法交换（ $\lambda(\mathbf{x}T) = (\lambda\mathbf{x})T$ ），此映射是良定义的。称 Φ_T 为 $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 上的一个**射影变换**。

命题 3.1. 射影变换具有以下基本性质：

1. Φ_T 是双射，且其逆为 $\Phi_{T^{-1}}$ 。
2. 射影变换将射影子空间映为射影子空间，且保持维数。
3. 所有射影变换构成一个群，记作 $\text{PGL}(n+1, \mathbb{F})$ ，称为**射影线性群**。它同构于 $\text{GL}(n+1, \mathbb{F})$ 模去标量矩阵 $\mathbb{F}^\times I$ 。

射影变换的重要性在于它保持射影几何的基本结构，并且可以将任意点、超平面等变换到标准位置。这一性质将在后面反复使用。

利用射影变换，我们可以证明射影空间去掉任何一个超平面后都同构于仿射空间。这正是“射影空间是仿射空间的完备化”这一思想的精确表述。

3.2 一般位置与射影变换

我们可以通过一个适当的射影变换将图形置于特殊位置，从而大大简化计算，而不失一般性。

定义 3.2 (一般位置). 设 $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 是 n 维射影空间，点集 $\{P_0, P_1, \dots, P_k\} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 称为处于**一般位置**，如果其中任意 $n+1$ 个点对应的齐次坐标向量线性无关。特别地，当 $k = n+1$ 时，这 $n+2$ 个点处于一般位置当且仅当任意 $n+1$ 个点线性无关。

在 $\mathbb{P}^2$ 中，四点处于一般位置等价于其中任意三点不共线；在 $\mathbb{P}^3$ 中，五点处于一般位置等价于任意四点不共面。

引理 3.1. 设 $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 是 n 维射影空间, $P_0, \dots, P_{n+1}$ 是 $n+2$ 个处于一般位置的点 (即任意 $n+1$ 个点线性无关)。若射影变换 $\Phi: \mathbb{P}^n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 满足 $\Phi(P_i) = P_i$ 对所有 $i = 0, \dots, n+1$ 成立, 则 Φ 为恒等变换。

证明. 将 $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 中的点视为 $\mathbb{F}^{n+1}$ 中的一维线性子空间。设 Φ 由可逆矩阵 $T \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{F})$ 诱导。取 $P_0, \dots, P_n$ 的代表向量 $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n$, 它们线性无关, 构成 $\mathbb{F}^{n+1}$ 的一组基。由于 $\Phi(P_i) = P_i$, 存在非零标量 $\lambda_i \in \mathbb{F}^\times$ 使得

$$\mathbf{v}_i T = \lambda_i \mathbf{v}_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

再取 P_{n+1} 的代表向量 $\mathbf{v}_{n+1}$ 。由一般位置条件, $\mathbf{v}_{n+1}$ 不能由任意 n 个 $\mathbf{v}_i$ 线性表示, 特别地它可以唯一地表示为基的线性组合

$$\mathbf{v}_{n+1} = a_0 \mathbf{v}_0 + \dots + a_n \mathbf{v}_n,$$

且所有系数 $a_i \neq 0$ (否则 $\mathbf{v}_{n+1}$ 就会与某 n 个 $\mathbf{v}_i$ 线性相关)。因为 Φ 也固定 P_{n+1} , 存在 $\lambda_{n+1} \in \mathbb{F}^\times$ 使得 $T(\mathbf{v}_{n+1}) = \lambda_{n+1} \mathbf{v}_{n+1}$ 。另一方面, 由线性性

$$\mathbf{v}_{n+1} T = \sum_{i=0}^n a_i \mathbf{v}_i T = \sum_{i=0}^n a_i \lambda_i \mathbf{v}_i.$$

比较两式得

$$\sum_{i=0}^n a_i \lambda_i \mathbf{v}_i = \lambda_{n+1} \sum_{i=0}^n a_i \mathbf{v}_i.$$

由于 $\mathbf{v}_i$ 线性无关, 比较系数得 $a_i \lambda_i = \lambda_{n+1} a_i$ 对所有 i 成立。因为 $a_i \neq 0$, 所以 $\lambda_i = \lambda_{n+1}$ 。因此所有 λ_i 相等, 记此公共值为 λ 。于是 $\mathbf{v}_i T = \lambda \mathbf{v}_i$ 对所有 i 成立, 即 T 在基上的作用是数乘 λ , 从而 $T = \lambda I$ 是标量矩阵。标量矩阵在射影空间上诱导的变换是恒等变换, 故 Φ 为恒等变换。 $\square$

定理 3.1 (射影变换的确定). 设 $\{P_0, P_1, \dots, P_{n+1}\}$ 和 $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_{n+1}\}$ 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 中两个处于一般位置的 $n+2$ 点组。则存在唯一的射影变换 $\Phi \in \text{PGL}(n+1, \mathbb{F})$, 使得 $\Phi(P_i) = Q_i$ 对 $i = 0, 1, \dots, n+1$ 成立。

证明. 取每个 P_i 的齐次坐标向量 $\mathbf{p}_i \in \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$, 则 $n+1$ 个向量 $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ 线性无关 (由一般位置保证)。类似地, 取 Q_i 的齐次坐标 $\mathbf{q}_i$, 则 $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_n$ 线性无关。

由于 $\{\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n\}$ 是 $\mathbb{F}^{n+1}$ 的一组基, 存在唯一的线性映射 $T: \mathbb{F}^{n+1} \rightarrow \mathbb{F}^{n+1}$ 使得 $T(\mathbf{p}_i) = \mathbf{q}_i$ 对 $i = 0, \dots, n$ 。 T 是可逆的 (它将基映为基), 从而诱导一个射影变换 Φ_T , 满足 $\Phi_T(P_i) = Q_i$ 对 $i = 0, \dots, n$ 。

现在考虑第 $n+1$ 个点 P_{n+1} 。将 $\mathbf{p}_{n+1}$ 用基 $\{\mathbf{p}_i\}$ 表示:

$$\mathbf{p}_{n+1} = \sum_{i=0}^n a_i \mathbf{p}_i, \quad a_i \in \mathbb{F}.$$

由一般位置知, 所有 $a_i \neq 0$ (否则 $\mathbf{p}_{n+1}$ 将与某 n 个 $\mathbf{p}_i$ 线性相关)。类似地, 将 $\mathbf{q}_{n+1}$ 用基 $\{\mathbf{q}_i\}$ 表示:

$$\mathbf{q}_{n+1} = \sum_{i=0}^n b_i \mathbf{q}_i, \quad b_i \neq 0.$$

我们希望通过调整齐次坐标的代表元使得 $\mathbf{p}_{n+1}T$ 与 $\mathbf{q}_{n+1}$ 成比例。为此, 重新选取代表元如下:

$$\mathbf{p}'_i = a_i \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{q}'_i = b_i \mathbf{q}_i \quad (i = 0, \dots, n),$$

而 $\mathbf{p}'_{n+1} = \mathbf{p}_{n+1}$, $\mathbf{q}'_{n+1} = \mathbf{q}_{n+1}$ (保持第 $n+1$ 个点不变)。则 $\{\mathbf{p}'_i\}$ 仍是一组基, 且 $\mathbf{p}'_{n+1} = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}'_i$ (因为 $\mathbf{p}_{n+1} = \sum a_i \mathbf{p}_i = \sum \mathbf{p}'_i$)。同样, $\mathbf{q}'_{n+1} = \sum \mathbf{q}'_i$ 。

取矩阵 T' 使得, $\mathbf{p}'_i T' = \mathbf{q}'_i$ 对 $i = 0, \dots, n$ 。则 T' 可逆, 且

$$\mathbf{p}'_{n+1} T' = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}'_i T' = \sum_{i=0}^n \mathbf{q}'_i = \mathbf{q}'_{n+1}.$$

因此 T' 诱导的射影变换 $\Phi_{T'}$ 满足 $\Phi_{T'}(P_i) = Q_i$ 对所有 $i = 0, \dots, n+1$ 成立 (注意 P_i 的代表元已调整为 $\mathbf{p}'_i$, 但 $\mathbf{p}'_i$ 与 $\mathbf{p}_i$ 成比例, 故对应同一点; 同样 Q_i 亦然)。

唯一性: 若存在两个射影变换 Φ, Ψ 满足条件, 则 $\Phi^{-1}\Psi$ 固定 $n+2$ 个处于一般位置的点, 由引理, 这样的变换必为恒等变换。故 $\Phi = \Psi$ 。□

注 3.1. 定理中的唯一性可由维数计算解释: $\text{PGL}(n+1, \mathbb{F})$ 的维数为 $(n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n$, 而每个点给出 n 个独立条件 (因为坐标比例自由), $n+2$ 个点恰好给出 $n(n+2) = n^2 + 2n$ 个条件, 从而唯一确定一个射影变换。

3.3 射影变换与仿射变换的关系

射影几何与仿射几何之间有着密切的联系: 仿射几何是射影几何在选定一条“无穷远直线”后的子几何。具体地, 一个射影变换如果保持某条直线 (称为无穷远直线) 不变, 那么它在去掉这个直线的仿射空间的限制就是一个仿射变换; 反之, 任何一个仿射变换都可以唯一地延拓为一个保持无穷远直线不变的射影变换。

定义 3.3. 设 Φ 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 上的一个射影变换, 由可逆线性变换 $T \in \text{GL}(n+1, \mathbb{F})$ 诱导。如果存在一个超平面 $H \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 使得 $\Phi(H) = H$, 则称 H 是 Φ 的**不变超平面**。

在齐次坐标下, 超平面 H 由线性方程 $\mathbf{a}\mathbf{x} = 0$ 定义, 不变性意味着 T 将 $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} = 0$ 的解空间映为自身, 即存在 $\lambda \in \mathbb{F}^\times$ 使得 $\mathbf{a}^\top T = \lambda \mathbf{a}^\top$, 换句话说, $\mathbf{a}$ 是 $T^\top$ 的一个特征向量。特别地, 如果 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 且 n 是奇数, 或者 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, 那么这样的不变超平面一定存在。

如果我们选定一个超平面作为“无穷远”超平面 H_∞ , 并考虑所有保持 H_∞ 不变的射影变换, 这些变换构成 $\text{PGL}(n+1, \mathbb{F})$ 的一个子群。下面我们将看到, 这个子群恰好同构于仿射变换群。

定理 3.2. 我们假设射影变换 Φ 存在一个不变的射影超平面 H 。由于 $H = \mathbb{P}(W)$ ，其中 $W \subset \mathbb{F}^{n+1}$ 是 n 维线性子空间。 $\Phi(H) = H$ 意味着 $T(W) = W$ (作为线性子空间)。因此 T 限制在 W 上是一个可逆线性变换，记作 $\varphi = T|_W : W \rightarrow W$ 。令 $A = \mathbb{P}^n(\mathbb{F}) \setminus H$ ，这是一个仿射空间。那么 $\Phi|_A : A \rightarrow A$ 是一个仿射变换。

证明. 令 $\mathbf{v}_0 \notin W$ ，对任意 $P, Q \in A$ ，设 $P = [\mathbf{v}_0 + \mathbf{w}]$, $Q = [\mathbf{v}_0 + \mathbf{w}']$ ，其中 $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$ 。则

$$\Phi(P) = [(\mathbf{v}_0 + \mathbf{w})T] = [\mathbf{v}_0 + \mathbf{w}T] = [\mathbf{v}_0T + \varphi(\mathbf{w})], \Phi(Q) = [\mathbf{v}_0T + \varphi(\mathbf{w}')].$$

由于 $T\mathbf{v}_0 \notin W$ (否则 $\mathbf{v}_0 \in T^{-1}(W) = W$ ，矛盾)，因此 $[T\mathbf{v}_0] \in A$ 。因此

$$\overrightarrow{\Phi(P)\Phi(Q)} = \psi(\Phi(Q)) - \psi(\Phi(P)) = \varphi(\mathbf{w}') - \varphi(\mathbf{w}) = \varphi(\mathbf{w}' - \mathbf{w}) = \varphi(\overrightarrow{PQ}).$$

这表明 $\Phi|_A$ 是仿射变换，其线性部分为 φ 。特别地，平移部分由 Φ 在 A 上的作用自然给出。 $\square$

同样，反过来我们由仿射变换，可以将其延拓成射影变换：

定理 3.3. 给定仿射空间 $A \cong \mathbb{F}^n$ 上的一个仿射变换 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{t}$ ($A \in \text{GL}(n, \mathbb{F})$, $\mathbf{t} \in \mathbb{F}^n$)，我们可以将其唯一地延拓为射影空间 $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 上的射影变换 Φ ，使得 Φ 保持无穷远超平面 H_∞ 不变。延拓的矩阵为：

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}.$$

在齐次坐标下，该映射为 $[x_1 : \cdots : x_n : x_{n+1}] \mapsto [A\mathbf{x} + \mathbf{t}x_{n+1} : x_{n+1}]$ 。当 $x_{n+1} \neq 0$ 时，即为原仿射变换；当 $x_{n+1} = 0$ 时，点落在无穷远直线上，被映为 $[A\mathbf{x} : 0]$ ，即无穷远直线上的点，且该映射是良定义的。

例 3.1. 在 $\mathbb{R}^2$ 中，平移 $f(x, y) = (x + 1, y + 2)$ 的射影延拓为：

$$[x : y : z] \mapsto [x + z : y + 2z : z].$$

在仿射坐标卡 $z = 1$ 上，得到 $(x + 1, y + 2)$ ；在无穷远直线 $z = 0$ 上，映射为 $[x : y : 0] \mapsto [x : y : 0]$ ，即恒等映射，因此无穷远直线上的点保持不变。

3.4 点列的交比

在射影空间 $\mathbb{P}^n$ 中，任意一条直线 L 都是 $\mathbb{P}^1$ 。设 $A, B, C, D \in L$ 是四个不同的点。选择 A 和 B 的齐次坐标向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{F}^{n+1}$ (非零)。由于 $A \neq B$ ， $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 线性无关。 L 上的任意点 X 可以表示为

$$X = [\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}], \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0),$$

从而我们得到了一个双射

$$L \rightarrow \mathbb{P}^1, X \mapsto [\lambda : \mu]$$

其中 $[\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1$ 称为点 X 在基 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 下的齐次坐标。特别地,

$$A = [1\mathbf{a} + 0\mathbf{b}] \longleftrightarrow [1 : 0], \quad B = [0\mathbf{a} + 1\mathbf{b}] \longleftrightarrow [0 : 1].$$

上述表示依赖于 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的具体选择。若改用另一组代表 $\mathbf{a}' = \alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}' = \beta\mathbf{b}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{F}^\times$), 则点 X 的表示变为

$$X = [\lambda'\mathbf{a}' + \mu'\mathbf{b}'] = [\lambda'\alpha\mathbf{a} + \mu'\beta\mathbf{b}].$$

与原来的 $[\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}]$ 比较, 得 $(\lambda', \mu') = (\lambda/\alpha, \mu/\beta)$ 。因此, X 的齐次坐标在基变换下变为 $[\lambda : \mu] \mapsto [\lambda/\alpha : \mu/\beta]$ 。

定义 3.4. 设 C 和 D 在基 $\{A, B\}$ 下的坐标分别为 $[\alpha_C : \beta_C]$ 和 $[\alpha_D : \beta_D]$, 即

$$C = [\alpha_C\mathbf{a} + \beta_C\mathbf{b}], \quad D = [\alpha_D\mathbf{a} + \beta_D\mathbf{b}].$$

则四点 A, B, C, D 的交比为

$$(A, B; C, D) = \frac{\alpha_C\beta_D}{\beta_C\alpha_D}. \quad (1)$$

容易证明, 交比的定义与 A, B 的齐次坐标代表元的选取无关。

命题 3.2. 交比具有以下对称性质:

$$\begin{aligned} (A, B; C, D) &= (C, D; A, B), \\ (A, B; C, D) &= \frac{1}{(A, B; D, C)}. \end{aligned}$$

证明. 第二条性质是显然的。对于第一条性质, 令 $\mathbf{c} = \alpha_C\mathbf{a} + \beta_C\mathbf{b}, \mathbf{d} = \alpha_D\mathbf{a} + \beta_D\mathbf{b}$, 我们容易得到 $A = [\beta_D\mathbf{c} - \beta_C\mathbf{d}], B = [\alpha_D\mathbf{c} - \alpha_C\mathbf{d}]$, 计算可得。□

定理 3.4. 设 $\Phi : \mathbb{P}^n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 是由可逆线性变换 $T \in \text{GL}(n+1, \mathbb{F})$ 诱导的射影变换。 A, B, C, D 是射影直线 $L \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ 上四个不同的点, 那么

$$(A, B; C, D) = (\Phi(A), \Phi(B); \Phi(C), \Phi(D)).$$

证明. 由 Φ 的定义, $\Phi(A) = [\mathbf{a}T], \Phi(B) = [\mathbf{b}T]$, 且

$$\Phi(C) = [\alpha_C\mathbf{a}T + \beta_C\mathbf{b}T], \quad \Phi(D) = [\alpha_D\mathbf{a}T + \beta_D\mathbf{b}T].$$

于是

$$(\Phi(A), \Phi(B); \Phi(C), \Phi(D)) = (A, B; C, D).$$

证毕。□

下面引理会在证明帕斯卡定理时使用

引理 3.2. 在射影直线 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})$ 上, 固定三个不同的点 A, B, C 。对于任意点 $X \in \mathbb{P}^1$, 定义

$$\varphi(X) = (A, B; C, X).$$

则 φ 是 $\mathbb{P}^1 \setminus A$ 到 $\mathbb{F}$ 的**双射** (一一对应)。特别地, φ 是单射。

证明. 取射影坐标, 令 $A = [1 : 0], B = [0 : 1], C = [1 : 1]$ (三点处于一般位置, 可通过射影变换实现)。则任意点 $X = [x : 1]$ ($x \in \mathbb{F}$) 满足

$$(A, B; C, X) = \frac{1 \cdot x}{1 \cdot 1} = x,$$

因此 φ 是双射。 □

例 3.2. 在具体计算中, 我们往往是从 A, B, C, D 的齐次坐标出发进行计算。设 A, B, C, D 的齐次坐标向量分别为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ 。假设 $\mathbf{c} = \alpha_C \mathbf{a} + \beta_C \mathbf{b}, \mathbf{d} = \alpha_D \mathbf{a} + \beta_D \mathbf{b}$ 。当 $n = 1$ (即在射影直线中), 我们可以计算下列行列式:

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a}, \alpha_C \mathbf{a} + \beta_C \mathbf{b}) = \beta_C \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

同理得到

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{d}) = \beta_D \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \det(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha_C \det(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \alpha_C \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \det(\mathbf{b}, \mathbf{d}) = \alpha_D \det(\mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

因此

$$(A, B; C, D) = \frac{\alpha_C \beta_D}{\beta_C \alpha_D} = \frac{\det(\mathbf{a}, \mathbf{d}) \det(\mathbf{b}, \mathbf{c})}{\det(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \det(\mathbf{b}, \mathbf{d})}.$$

例 3.3 (从交比得到单比). 考虑仿射直线 $\mathbb{F}$ 上的三个不同点 $a, b, c \in \mathbb{F}$ 。将它们嵌入到射影直线 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})$ 中, 标准嵌入为

$$t \mapsto [t : 1],$$

并添加无穷远点 ∞ , 其齐次坐标为 $[1 : 0]$ 。于是我们得到射影直线上的四个点:

$$A = [a : 1], \quad B = [b : 1], \quad C = [c : 1], \quad D = [1 : 0].$$

不妨假设 $a = 0$ (将 b, c 分别替换为 $b - a, c - a$)。那么

$$(c, 1) = \frac{b-c}{b}(0, 1) + \frac{c}{b}(b, 1), (1, 0) = \frac{-1}{b}(0, 1) + \frac{1}{b}(b, 1)$$

计算交比

$$(A, B; C, D) = \frac{(b-c)/b^2}{-c/b^2} = \frac{b-c}{-c} = (A, B; C)$$

即有向单比。

3.5 线束交比

设 O 是射影平面 $\mathbb{P}^2$ 中的一个点。过 O 的直线族称为一个**线束**。每条过 O 的直线 L 可用齐次线性方程

$$uX + vY + wZ = 0$$

表示，其中系数 $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$ 且满足 $ux_0 + vy_0 + wz_0 = 0$ ($[x_0 : y_0 : z_0]$ 是 O 的齐次坐标)。系数 (u, v, w) 在比例意义下唯一确定 l ，因此每条直线对应射影对偶平面 $\mathbb{P}^2$ 中的一个点，记为 $l^* = [u : v : w]$ 。由于 O 固定，所有 l^* 位于 $\mathbb{P}^2$ 的一条直线上（即对偶直线 O^* ）。因此，线束中的直线与对偶直线 O^* 上的点一一对应。

定义 3.5. 给定线束中四条直线 L_a, L_b, L_c, L_d ，它们对应对偶直线 O^* 上的四个点 a^*, b^*, c^*, d^* 。则直线 L_a, L_b, L_c, L_d 的**交比**定义为这四个点在 O^* 上的交比：

$$(L_a, L_b; L_c, L_d) := (a^*, b^*; c^*, d^*).$$

将 L_c 和 L_d 用 L_a, L_b 线性表示为

$$L_c = \alpha L_a + \beta L_b, \quad L_d = \gamma L_a + \delta L_b,$$

其中 $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$ ，且系数视为齐次坐标（即 (α, β) 与 (γ, δ) 相差非零常数倍代表同一直线）。则

$$(L_a, L_b; L_c, L_d) = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}.$$

该值与基直线的选取无关，且在射影变换下保持不变。

取一条不经过 O 的截线 l ，设 l 与 L_a, L_b, L_c, L_d 的交点依次为 A, B, C, D 。取射影变换使得 A, B 在 l 上的齐次坐标可以取为 $[1 : 0]$ 和 $[0 : 1]$ ，而 C, D 的坐标正是 $[\alpha : \beta]$ 和 $[\gamma : \delta]$ （因为直线与截线的交点坐标与直线参数成比例）。因此，

$$(A, B; C, D) = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} = (L_a, L_b; L_c, L_d).$$

故线束交比与相应点列交比一致。

4 射影平面几何的两个经典定理

在本节中，我们用射影坐标的方法证明德萨格定理和帕普斯定理。

4.1 德萨格定理

定理 4.1 (德萨格定理). 设 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 是射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{F})$ 中的两个三角形（顶点不共线）。若三对对应顶点的连线 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 共点于 O ，则三对对应边的交点

$$P = B_1C_1 \cap B_2C_2, \quad Q = C_1A_1 \cap C_2A_2, \quad R = A_1B_1 \cap A_2B_2$$

共线。

证明. 不妨假设 A_1, B_1, C_1, O 处于一般位置, 否则三对对应边中存在一对重合, 定理平凡成立. 我们可以通过射影变换使它们的坐标分别为

$$A_1 = [1 : 0 : 0], \quad B_1 = [0 : 1 : 0], \quad C_1 = [0 : 0 : 1], \quad O = [1, 1, 1].$$

由于 A_2 在直线 OA_1 上, 不妨设 $A_2 \neq A_1$, 则存在 $a \in \mathbb{F}$ 使得

$$A_2 = [a + 1 : 1 : 1].$$

如果 $A_2 = A_1$, 则 $O = A_2 = A_1 = [1 : 0 : 0]$, 在上式中取任意 a 即可。

类似地, B_2 在 OB_1 上, 存在 $b \in \mathbb{F}$ 使得

$$B_2 = [1 : b + 1 : 1].$$

C_2 在 OC_1 上, 取参数 $c \in \mathbb{F}$ 使得

$$C_2 = [1 : 1 : c + 1].$$

现在计算交点 $P = B_1C_1 \cap B_2C_2$ 。直线 B_1C_1 的方程为 $x_0 = 0$, 故 P 可设为 $[0 : p : q]$ 。直线 B_2C_2 上的点可参数化为 $sB_2 + tC_2$, 由坐标可知 $s = -t$. 代入得

$$P = [0 : -tb : tc] = [0 : b : -c].$$

即 $P = [0 : b : -c]$ 。

类似地, $Q = [a : 0 : -c]$, $R = [a : -b : 0]$ 。

验证三点共线, 计算行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & b & -c \\ a & 0 & -c \\ a & -b & 0 \end{vmatrix}.$$

按第一行展开:

$$\Delta = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -c \\ -b & 0 \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} a & -c \\ a & 0 \end{vmatrix} + (-c) \cdot \begin{vmatrix} a & 0 \\ a & -b \end{vmatrix}.$$

计算:

$$-b \cdot (a \cdot 0 - (-c)a) = -b \cdot (ac) = -abc,$$

$$-c \cdot (a(-b) - 0 \cdot a) = -c \cdot (-ab) = abc.$$

故 $\Delta = -abc + abc = 0$, 因此 P, Q, R 共线。

□

4.2 帕普斯定理

定理 4.2 (帕普斯定理). 设 l_1 和 l_2 是射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{F})$ 中的两条直线, $A, B, C \in l_1$ 为三个不同点, $A', B', C' \in l_2$ 为三个不同点. 则交点

$$P = AB' \cap A'B, \quad Q = AC' \cap A'C, \quad R = BC' \cap B'C$$

共线。

证明. 假设 A 是 l_1, l_2 的交点, 那么 $P = Q = A'$, 结论平凡成立. 因此我们不妨假设六个点都不是 l_1, l_2 的交点。

通过一个射影变换, 我们可以将直线 l_1 和 l_2 分别变为坐标轴 $x_2 = 0$ 和 $x_1 = 0$ 。这是因为任意两条不同的直线总可射影地映为任意两条直线。

注意到这时候交点为 $[1:0:0]$, 由于六个点互异且不在交点上, 它们的坐标可写为

$$A = [a : 1 : 0], \quad B = [b : 1 : 0], \quad C = [c : 1 : 0], \quad A' = [a' : 0 : 1], \quad B' = [b' : 0 : 1], \quad C' = [c' : 0 : 1],$$

其中 $a, b, c \in \mathbb{F}$ 互不相等, $a', b', c' \in \mathbb{F}$ 互不相等。

计算直线 AB' 与 $A'B$ 的交点 P 。 AB' 过 $[a : 1 : 0]$ 和 $[b' : 0 : 1]$, 其方程可由行列式得到为 $x_0 - ax_1 - b'x_2 = 0$ (求在三维空间中的法向量即可)。 $A'B$ 过 $[a' : 0 : 1]$ 和 $[b : 1 : 0]$, 方程为 $-x_0 + bx_1 + a'x_2 = 0$ 。联立解得

$$P = [bb' - aa' : b' - a' : b - a].$$

同理可得

$$Q = [cc' - aa' : c' - a' : c - a], \quad R = [cc' - bb' : c' - b' : c - b].$$

现在验证 P, Q, R 共线。考虑行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} bb' - aa' & b' - a' & b - a \\ aa' - cc' & a' - c' & a - c \\ cc' - bb' & c' - b' & c - b \end{vmatrix}.$$

三行相加得到 0, 因此矩阵的行向量线性相关, 故 $\Delta = 0$, P, Q, R 共线。 $\square$